



Internationella matematikdagen
och Pi-dagen den 14 mars.

**Den här uppgiften är hämtad
ur Origo 1c.**

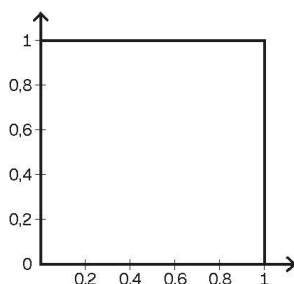
Nivå 1c

Aktivitet 6:3

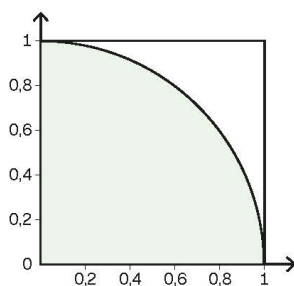
Programmering: Approximera π – version 1

I den här aktiviteten får du skriva program som ger ett närmevärde till π .

- 1** Skriv ett program som slumpar fram 100 punkter i en kvadrat med sidan 1 l.e.



- 2** Utveckla programmet så att det beräknar hur många av de slumpade punkterna i uppgift 1 som hamnar innanför den inskrivna kvarts-cirkeln med radien 1 l.e.

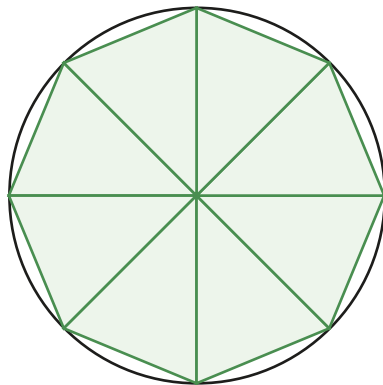


- 3** Hur stor andel av kvadratens yta täcks av det skuggade området?
- 4** Använd slutsatsen i uppgift 3 och modifiera ditt program i uppgift 2 så att det beräknar ett närmevärde till π .
- 5** Ungefär hur många punkter måste du simulera för att få
- a) två korrekta decimaler på π
 - b) tre korrekta decimaler på π
- Ge svaret i form av en tiopotens.

Programmering: Approximera π – version 2

Genom att följa stegen här nedanför kan du skriva ett program som ger ett närmevärde till π .

I cirkeln här nedanför har vi inskrivit en regelbunden åttahörning.



- 1** Beräkna den inskrivna månghörningens area.

Tänk dig att vi inskriver en regelbunden månghörning med n hörn i cirkeln.

- 2** Skriv en formel för hur arean av månghörningen beror av cirkelns radie r och antalet hörn n .
- 3**
 - a) Skriv ett ungefärligt uttryck för π genom att jämföra månghörningens area med cirkelns.
 - b) Skriv ett program som beräknar uttryckets värde för $n = 8, \dots, 100$.
- 4** Undersök med hjälp av programmet hur många hörn månghörningen ska ha för att du ska få
 - a) tre korrekta decimaler på π
 - b) sex korrekt decimaler på π

Ge svaret som en tiopotens.

Programmering: Approximera π

SIDA 1 AV 2

Syfte och centralt innehåll

Syftet med den här aktiviteten är att eleverna ska få använda programmering för att uppskatta värdet på konstanten π . I den första aktiviteten får eleverna uppskatta π genom att slumpa fram punkter i enhetskvadraten och undersöka hur många av dem som hamnar innanför enhetscirkeln i första kvadranten. Det kräver att de har kunskaper om Pythagoras sats eller cirkelns ekvation. I den andra aktiviteten får eleverna uppskatta π genom att jämföra cirkelns area med arean av en inskriven månghörning. Det är svårt att göra utan kunskaper i trigonometri. Aktiviteterna kan därför vara lämpliga att använda i samband med sannolikhetslära och trigonometri i Matematik Origo nivå 1c.

Materiel

Dator med lämplig kompilator (t.ex. IDLE). Förslag på kod som presenteras här nedanför är gjord i Python 3.

Lämpliga förkunskaper i programmering

Eleverna bör känna till hur man upprepar kod med hjälp av kommandot `for`.

Genomförande

Eftersom aktiviteten inte kräver så mycket kod, kan den passa bra för elever som inte har så stor erfarenhet av programmering.

- Dela upp eleverna så att de arbetar två och två med en dator. Uppmana dem att låta den som känner sig minst van vid datorer och programmering sköta datorn. Är båda lika vana kan de turas om.
- Påminn vid behov eleverna om hur man skriver `for`-satser, t.ex. genom att tillsammans skriva ett program som skriver ut de 100 första positiva heltalen:

```
for n in range (1, 101):
    print (n)
```

Lösning

Approximera π – version 1

```
1 from random import *
for n in range(1, 101):
    x = uniform(0,1)
    y = uniform(0,1) #Slumpar fram en
    punkt i intervallet [0, 1] med
    koordinaterna (x, y)
    print(x,",", y)
```

```
2 from random import *
a = 0
for n in range(1, 101):
    x = uniform(0,1)
    y = uniform(0,1)
    if x**2 + y**2 <= 1:
        a = a + 1
    print(a)
```

3 Arean av cirkelsektorn är $\frac{\pi \cdot 1^2}{4} = \frac{\pi}{4}$ och arean av kvadraten är 1. Cirkelsektorns andel av kvadraten är alltså $\frac{\pi}{4}$.

4 Sannolikheten P att en slumpvist vald punkt i enhetskvadraten ligger innanför kvartscirkeln är $\frac{\pi}{4}$, dvs.

$$P = \frac{\pi}{4}$$

$$\pi = 4 \cdot P$$

Det ger programmet:

```
from math import *
from random import *
a = 0
for n in range(1, 1000001):
    x = uniform(0,1)
    y = uniform(0,1)
    if x**2 + y**2 <= 1:
        a = a + 1
print(4 * a/1000000) #Skriver ut
approximationen av pi
print(pi) #Skriver ut pi med 15 kor-
rekta decimaler
```

5 a) Ca 10^5

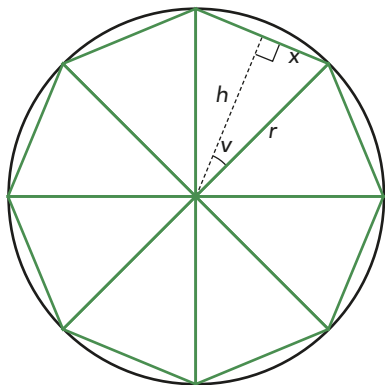
b) Ca 10^7

Programmering: Approximera π

SIDA 2 AV 2

Approximera π – version 2

1



Eftersom åttahörningen är regelbunden är vinkeln ν

$$\frac{360^\circ}{16} = 22,5^\circ$$

$$\frac{x}{r} = \sin 22,5^\circ \text{ som ger } x = r \sin 22,5^\circ$$

$$\frac{h}{r} = \cos 22,5^\circ \text{ som ger } h = r \cos 22,5^\circ$$

Arealen för månghörningen blir

$$A_m = n \cdot 2 \cdot \frac{x \cdot h}{2} = n \cdot r^2 \sin 22,5^\circ \cdot \cos 22,5^\circ = 8 \cdot 1^2 \cdot \sin 22,5^\circ \cdot \cos 22,5^\circ \approx 2,83 \text{ a.e.}$$

2 Med ett liknande resonemang som i uppgift 1 får vi:

$$A_m = n \cdot r^2 \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

Kommentar: Med areasatsen får man

$$A_m = n \cdot \frac{r^2 \cdot \sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right)}{2}$$

3 a) Eftersom månghörningens area närmar sig cirkelns area, $A_c = \pi r^2$, då antalet hörn blir fler, sätter vi $A_m \approx A_c$, vilket ger följande approximation av talet π :

$$\pi \approx n \cdot \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

Kommentar: Med areasatsen får man

$$\pi \approx n \cdot \frac{\sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right)}{2}$$

b)

```
from math import *
for n in range (8, 101):
    print(n * cos(pi/n)*sin(pi/n))
#I koden måste vi använda talet pi, eftersom kommandona cos och sin kräver argument i radianer.
```

4 a) $10^2 (2 \cdot 10^2)$

b) Ca 10^4

Utvidgning och variation

Om man vill utvidga uppgiften, kan man låta eleverna skriva program som approximerar talet π genom att använda någon av följande serier

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

Att lyfta fram

I aktiviteten presenterar vi två metoder för att approximerar talet π . Första metoden utnyttjar att förhållandet mellan arean av kvartscirkeln och arean av enhetskvadraten bör vara detsamma som förhållandet mellan antalet slumpade punkter som hamnar i kvartscirkeln och det totala antalet slumpade punkter. Att utnyttja areor för att uppskatta en sannolikhet på det här sättet ingår normalt inte i någon av matematikkurserna och kan därför vara värt att förklara. I den andra metoden blir approximationen bättre ju fler hörn månghörningen har. Det kan ge tillfälle att lyfta fram begreppet gränsvärde.