

3.3 Differentialekvationer av andra ordningen

Den homogena differentialekvationen $y'' + ay' + by = 0$

Ekvationen $y'' + 3y' - 5y = 0$ är ett exempel på en *homogen differentialekvation av andra ordningen*, eftersom andraderivatan är högsta derivata och högerledet är noll. Homogena differentialekvationer av andra ordningen kan allmänt skrivas i formen $y'' + ay' + by = 0$, där a och b är reella koefficienter.

Lösningen till andra ordningens homogena ekvation

Tidigare i det här kapitlet har vi visat att en lösning till första ordningens differentialekvation $y' + ay = 0$ är $y = e^{-ax}$. På liknande sätt antar vi här att en lösning till den homogena differentialekvationen av andra ordningen $y'' + ay' + by = 0$ är $y = e^{rx}$.

Vi får då $y' = re^{rx}$ och $y'' = r^2e^{rx}$. Insättningen ger

$$r^2e^{rx} + are^{rx} + be^{rx} = 0$$



y''



y'



y

Vi bryter ut e^{rx}

$$e^{rx}(r^2 + ar + b) = 0$$

Eftersom $e^{rx} \neq 0$, så är VL noll när

$$r^2 + ar + b = 0$$

Karakteristisk ekvation

Rötterna till andragradsekvationen $r^2 + ar + b = 0$ ger alltså de värden på r för vilka $y = e^{rx}$ är en lösning till differentialekvationen. Ekvationen $r^2 + ar + b = 0$ kallas för *den karakteristiska ekvationen* till differentialekvationen $y'' + ay' + by = 0$.

Den karakteristiska ekvationen

Om den karakteristiska ekvationen $r^2 + ar + b = 0$ till differentialekvationen $y'' + ay' + by = 0$ har roten r_0 , så är $y = e^{r_0x}$ en lösning till $y'' + ay' + by = 0$.

När vi löser den karakteristiska ekvationen $r^2 + ar + b = 0$ kan vi få tre olika fall

- Två olika reella rötter
- En reell, så kallad dubbelrot
- Två icke-reella rötter

Det här gäller alla andragradsekvationer

Två olika reella rötter

Vi undersöker differentialekvationen $y'' + y' - 6y = 0$. Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 + r - 6 = 0$$

som har lösningen

$$r = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \quad \text{Med hjälp av } pq\text{-formeln}$$

$$r_1 = 2$$

$$r_2 = -3$$

Den karakteristiska ekvationen till differentialekvationen $y'' + y' - 6y = 0$ har alltså *två olika reella rötter*.

Det innebär att två av lösningarna till differentialekvationen $y'' + y' - 6y = 0$ är $y_1 = e^{2x}$ och $y_2 = e^{-3x}$. Men då är också $y_1 = C_1 e^{2x}$ och $y_2 = C_2 e^{-3x}$ lösningar till differentialekvationen för godtyckliga värden på konstanterna C_1 och C_2 .

Allmän lösning

Det går också att visa att den *allmänna lösningen* till ekvationen är summan av lösningarna $y_1 = C_1 e^{2x}$ och $y_2 = C_2 e^{-3x}$, nämligen $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$. Du får själv verifiera den lösningen i uppgift 3303.



Lösningen till $y'' + ay' + by = 0$ när den karakteristiska ekvationen ger två olika reella rötter

Om den karakteristiska ekvationen till differentialekvationen $y'' + ay' + by = 0$ har två olika reella rötter r_1 och r_2 , så har ekvationen den allmänna lösningen $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, där C_1 och C_2 är konstanter.



Exempel:

Bestäm den allmänna lösningen till $y'' + 4y' - 5y = 0$.

Lösning:

Differentialekvationen $y'' + 4y' - 5y = 0$ har den karakteristiska ekvationen

$$r^2 + 4r - 5 = 0$$

som har lösningarna

$$r = -2 \pm \sqrt{4 + 5} = -2 \pm 3 \quad pq\text{-formeln}$$

$$r_1 = 1$$

$$r_2 = -5$$

Den karakteristiska ekvationen har två reella rötter och den allmänna lösningen till differentialekvationen $y'' + 4y' - 5y = 0$ är $y = C_1 e^x + C_2 e^{-5x}$.

Svar: Den allmänna lösningen till ekvationen är $y = C_1 e^x + C_2 e^{-5x}$.

 **Exempel:** Bestäm den allmänna lösningen till $y'' - 2y' = 0$.

Lösning: Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 - 2r = 0 \quad \text{Faktorisera VL}$$

$$r(r - 2) = 0$$

som har rötterna

$$r_1 = 0 \text{ och } r_2 = 2$$

Rötterna $r_1 = 0$ och $r_2 = 2$ ger lösningen $y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{2x} = C_1 + C_2 e^{2x}$.

Svar: Den allmänna lösningen till differentialekvationen är $y = C_1 + C_2 e^{2x}$

 **Exempel:** Bestäm den lösning till $y'' + 2y' - 8y = 0$ som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 8$ och $y'(0) = -14$.

Lösning: Den karakteristiska ekvationen är $r^2 + 2r - 8 = 0$ som har lösningarna

$$r = -1 \pm \sqrt{1 + 8} \quad \text{Med pq-formeln}$$

$$r_1 = 2 \text{ och } r_2 = -4$$

Den allmänna lösningen blir $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x}$.

Med hjälp av begynnelsevillkoren $y(0) = 8$ och $y'(0) = -14$ bestämmer vi C_1 och C_2

$$y(0) = C_1 e^{2 \cdot 0} + C_2 e^{-4 \cdot 0} = C_1 + C_2 \quad y(0) = C_1 + C_2 = 8$$

Vi deriverar $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x}$

$$y' = 2C_1 e^{2x} - 4C_2 e^{-4x}$$

$$y'(0) = 2C_1 e^{2 \cdot 0} - 4C_2 e^{-4 \cdot 0} = 2C_1 - 4C_2 \quad y'(0) = 2C_1 - 4C_2 = -14$$

Vi kan nu ställa upp ekvationssystemet

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 8 & (1) \\ 2C_1 - 4C_2 = -14 & (2) \end{cases}$$

Här använder vi additionsmetoden, men det går lika bra att använda substitutionsmetoden.

Den första ekvationen multipliceras med 4 och sedan adderas ekvationerna ledvis.

$$\begin{array}{rcl} 4(C_1 + C_2) & = & 4 \cdot 8 \\ + 2C_1 - 4C_2 & = & -14 \\ \hline 6C_1 & = & 18 \end{array}$$

$$C_1 = 3 \text{ insättes i (1)}$$

$$3 + C_2 = 8 \text{ som ger } C_2 = 5$$

Svar: Lösningen blir $y = 3e^{2x} + 5e^{-4x}$

A-UPPGIFTER

3301 Bestäm den karakteristiska ekvationen till

- a) $y'' + 3y' + 2y = 0$
- b) $y'' - 2y' - 3y = 0$
- c) $2y'' - 10y' + 8y = 0$

3302 Vilken sorts rötter har den karakteristiska ekvationen till differentialekvationerna här nedanför: en dubbelrot, två olika reella rötter eller två olika icke-reella rötter?

- a) $y'' - 4y' + 4y = 0$
- b) $2y'' - 8y' - 9y = 0$
- c) $y'' = 4y' - 6y$

3303 Verifiera att $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$ är lösning till differentialekvationen $y'' + y' - 6y = 0$.

3304 Bestäm den allmänna lösningen till

- a) $y'' + 2y' - 8y = 0$
- b) $y'' - y' - 2y = 0$
- c) $y'' + 4y' + 3y = 0$

3305 Bestäm den allmänna lösningen till

- a) $y'' + 2y' = 0$
- b) $y'' - y' = 0$
- c) $y'' = 5y'$

3306 Bestäm den allmänna lösningen till

- a) $y'' - y' - 6y = 0$
- b) $y'' + 9y' + 20y = 0$
- c) $y'' - 6y' - 7y = 0$

3307 Bestäm den lösning till $y'' - 3y' - 10y = 0$ som uppfyller $y(0) = 5$ och $y'(0) = 11$.

3308 Bestäm samtliga lösningar till

- a) $y'' = y'$
- b) $20y'' = 260y' - 800y$

B-UPPGIFTER

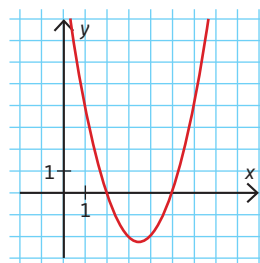
3309 För vilka tal k kan den allmänna lösningen till differentialekvationen $y'' + ky' + 25y = 0$ skrivas i formen $y = Ce^{ax} + De^{bx}$? Motivera ditt svar.

3310 För vilket tal $k > 0$ har differentialekvationen $y'' + ky' - 15y = 0$ den allmänna lösningen $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-5x}$? Motivera ditt svar.

3311 Bestäm den lösning till $5y'' - 5y' - 30y = 0$ som uppfyller $y(0) = -2$ och $y'(0) = -11$.

3312 Bestäm den lösning till $3y'' = 6y' + 105y$ som uppfyller $y(0) = 1$ och $y'(0) = 9$.

3313 Den karakteristiska ekvationen till differentialekvationen $y'' + ay' + by = 0$ kan skrivas i formen $f(r) = 0$. Bestäm differentialekvationens allmänna lösning med hjälp av figuren som visar grafen $y = f(r)$.



C-UPPGIFTER

3314 Konstruera en differentialekvation med begynnelsevillkor som har lösningen $y = e^{-5x} + e^{8x}$



3

Den karakteristiska ekvationen ger en dubbelrot

Differentialekvationen $y'' + 4y' + 4y = 0$ har den karakteristiska ekvationen

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

Med rötterna

$$r = -2 \pm \sqrt{4 - 4}$$

Med pq-formeln

$$r = -2 \pm 0$$

Ekvationen har en dubbelrot

En lösning

Den karakteristiska ekvationen har alltså endast en rot $r = -2$. En lösning till differentialekvationen är därför $y = e^{-2x}$. Tidigare har vi sett att andra ordningens differentialekvationer kan ha flera lösningar. Vi undersöker om det finns fler lösningar genom att ansätta $y = z \cdot e^{-2x}$, där z är en funktion av x . Derivering ger

$$y' = z' \cdot e^{-2x} - 2z \cdot e^{-2x} \quad \text{Produktregeln } D(u \cdot v) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

och

$$y'' = z'' \cdot e^{-2x} - 2z' \cdot e^{-2x} - 2z' \cdot e^{-2x} + 4z \cdot e^{-2x} = z'' \cdot e^{-2x} - 4z' \cdot e^{-2x} + 4z \cdot e^{-2x}$$

Vi sätter in uttrycken för y , y' och y'' i den ursprungliga differentialekvationen

$$y'' + 4y' + 4y = 0. \text{ Vi får}$$

$$\begin{aligned} \text{VL} &= \underbrace{z'' \cdot e^{-2x} - 4z' \cdot e^{-2x} + 4z \cdot e^{-2x}}_{y''} + 4 \underbrace{(z' \cdot e^{-2x} - 2z \cdot e^{-2x})}_{y'} + 4 \underbrace{(z \cdot e^{-2x})}_y = \\ &= z'' \cdot e^{-2x} - 4z' \cdot e^{-2x} + 4z \cdot e^{-2x} + 4z' \cdot e^{-2x} - 8z \cdot e^{-2x} + 4z \cdot e^{-2x} = z'' \cdot e^{-2x} \end{aligned}$$

Alltså är $y = z \cdot e^{-2x}$ en lösning till differentialekvationen om

$$z'' \cdot e^{-2x} = 0$$

Och eftersom $e^{-2x} \neq 0$, så måste $z'' = 0$. Det ger att

$$z' = C_1 \quad \text{och} \quad z' \text{ primitiv funktion till } z''$$

$$z = C_1 x + C_2 \quad z \text{ primitiv funktion till } z'$$

Allmän lösning

Eftersom vi utgick från att $y = z \cdot e^{-2x}$, så blir den allmänna lösningen till differentialekvationen $y = (C_1 x + C_2) \cdot e^{-2x}$. På liknande sätt kan man visa att alla homogena differentialekvationer, där den karakteristiska ekvationen har den reella dubbelroten r , också har den allmänna lösningen $y = (C_1 x + C_2) \cdot e^{rx}$

Lösningen till $y'' + ay' + by = 0$ när den karakteristiska ekvationen ger en reell dubbelrot

Om den karakteristiska ekvationen till $y'' + ay' + by = 0$ har en reell dubbelrot r_0 , så har differentialekvationen den allmänna lösningen $y = (C_1 x + C_2) \cdot e^{r_0 x}$, där C_1 och C_2 är konstanter.

**Exempel:**

Bestäm lösningen till $y'' - 6y' + 9y = 0$ som uppfyller villkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 4$.

Lösning:

Den karakteristiska ekvationen $r^2 - 6r + 9 = 0$ har lösningen

$$r = 3 \pm \sqrt{9 - 9} = 3 \quad pq\text{-formeln}$$

Eftersom lösningen till den karakteristiska ekvationen ger en dubbelrot, så är den allmänna lösningen $y = (C_1x + C_2) \cdot e^{3x}$

Med hjälp av villkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 4$ kan vi bestämma C_1 och C_2

$$y(0) = (C_1 \cdot 0 + C_2)e^{3 \cdot 0} = C_2$$

$$y' = C_1e^{3x} + 3(C_1x + C_2)e^{3x} \quad \text{Derivatan av en produkt}$$

$$y'(0) = C_1e^{3 \cdot 0} + 3(C_1 \cdot 0 + C_2)e^{3 \cdot 0} = C_1 + 3C_2$$

Villkoret $y(0) = 0$ ger $C_2 = 0$, som tillsammans med villkoret

$$y'(0) = 4 \text{ ger } C_1 = 4. \quad y'(0) = 4 \text{ ger } C_1 + 3C_2 = C_1 + 0 = 4$$

Alltså blir lösningen $y = 4xe^{3x}$.

Svar: Den lösning till differentialekvationen som uppfyller villkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 4$ är $y = 4xe^{3x}$.

3

A-UPPGIFTER

3315 Bestäm den allmänna lösningen till

- a) $y'' + 2y' + y = 0$
- b) $y'' - 8y' + 16y = 0$
- c) $y'' - 24y' + 144y = 0$

3316 Bestäm den allmänna lösningen till

- a) $y'' - 6y' + 9y = 0$
- b) $y'' - 16y' + 64y = 0$
- c) $y'' - 10y' + 25y = 0$

3317 Bestäm den lösning till $y'' - 14y' + 49y = 0$ som uppfyller $y(0) = 0$ och $y(1) = 2e^7$.

3318 Bestäm den allmänna lösningen till

- a) $2y'' = -76y' - 722y$
- b) $22y' = y'' + 121y$
- c) $5y'' = -50(y' + 2,5y)$

B-UPPGIFTER

3319 Bestäm den lösning till $y'' - 12y' + 36y = 0$ som uppfyller $y(0) = 5$ och $y'(0) = 26$.

3320 Bestäm den lösning till $3y'' + 90y' + 675y = 0$ som uppfyller $y(0) = 3$ och $y'(0) = 5$.

3321 För vilket tal k har differentialekvationen $y'' + ky' + 121y = 0$ den allmänna lösningen $y = (Cx + D)e^{-11x}$? Motivera ditt svar.

3322 Rörelsen hos en partikel kan vid tiden t beskrivas med hjälp av dess läge s , hastighet v och acceleration a . Sambandet mellan sträckan, hastigheten och accelerationen ges av differentialekvationen $a(t) - 6v(t) + 9s(t) = 0$. Bestäm funktionen $s(t)$ i allmän form.

C-UPPGIFTER

3323 **ö** Konstruera en differentialekvation som har lösningen $y = (2x - 5)e^{-3x}$.



Den karakteristiska ekvationen ger två icke-reella rötter

Differentialekvationen $y'' - 4y' + 13y = 0$ har den karakteristiska ekvationen $r^2 - 4r + 13 = 0$, med rötterna

$$r = 2 \pm \sqrt{4 - 13} \quad pq\text{-formeln}$$

$$r = 2 \pm 3i$$

Ekvationen har alltså de *två icke-reella* rötterna

$$r_1 = 2 + 3i \text{ och } r_2 = 2 - 3i$$

Differentialekvationens lösning blir $y = C_1 e^{(2+3i)x} + C_2 e^{(2-3i)x}$

Eulers formel:
 $e^{iv} = \cos v + i \sin v$

Vi kan skriva om lösningen med hjälp av Eulers formel

$$y = C_1 e^{(2+3i)x} + C_2 e^{(2-3i)x} = C_1 e^{2x} e^{3ix} + C_2 e^{2x} e^{-3ix} \quad \text{Eftersom } a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

$$= e^{2x}(C_1 e^{3ix} + C_2 e^{-3ix}) = \quad \text{Använd Eulers formel}$$

$\cos(-3x) = \cos 3x$ och
 $\sin(-3x) = -\sin 3x$

$$= e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_1 i \sin 3x + C_2 \cos(-3x) + C_2 i \sin(-3x)) =$$

$$= e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_1 i \sin 3x + C_2 \cos 3x - C_2 i \sin 3x) =$$

$$= e^{2x}((C_1 + C_2) \cos 3x + i(C_1 - C_2) \sin 3x)$$

Sätt $C_1 + C_2 = A$ och $i(C_1 - C_2) = B$. Det ger

$$y = e^{2x}(A \cos 3x + B \sin 3x)$$

Eftersom konstanterna C_1 och C_2 kan vara komplexa, så kan också

$B = i(C_1 - C_2)$ och $A = C_1 + C_2$ vara reella.

Lösningen till $y'' + ay' + by = 0$ när den karakteristiska ekvationen ger två icke-reella rötter

Om den karakteristiska ekvationen till $y'' + ay' + by = 0$ har två icke-reella rötter $r_1 = \alpha + \beta i$ och $r_2 = \alpha - \beta i$ ($\beta \neq 0$), så har differentialekvationen den allmänna lösningen $y = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$, där A och B är konstanter.



Exempel: Bestäm samtliga lösningar till $y'' + 3y' + 8,5 = 0$.

Lösning: Vi löser den karakteristiska ekvationen $r^2 + 3r + 8,5 = 0$ med pq -formeln

$$r^2 + 3r + 8,5 = 0$$

$$r = -1,5 \pm \sqrt{2,25 - 8,5}$$

$$r_1 = -1,5 + 2,5i \quad \text{Ekvationen har två icke-reella rötter}$$

$$r_2 = -1,5 - 2,5i$$

Svar: Lösningen till differentialekvationen är

$$y = e^{-1,5x}(A \cos 2,5x + B \sin 2,5x).$$

A-UPPGIFTER

3324 Bestäm den allmänna lösningen till

- a) $y'' + 6y' + 10y = 0$
- b) $y'' - 10y' + 29y = 0$
- c) $y'' + 25y = 0$

3325 Bestäm den allmänna lösningen till

- a) $y'' - 2y' + 2y = 0$
- b) $y'' + 3y' + 2,5y = 0$
- c) $y'' - 10y' + 26y = 0$

3326 a) Bestäm den allmänna lösningen till

$$y'' + 4y' + 8y = 0$$

b) Vilken lösning uppfyller villkoren

$$y(0) = 0 \text{ och } y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2e^{-\pi/2}?$$

3327 Bestäm den allmänna lösningen till

- a) $2y'' + 14y' + 25y = 0$
- b) $3y'' = 6(3y' - 5y)$
- c) $5y'' = 40y' - 95y$

3328 Bestäm den lösning till $y'' - 2y' + 5y = 0$ som uppfyller $y(0) = 2$ och $y\left(\frac{\pi}{8}\right) = e^{\pi/8}$.

B-UPPGIFTER

3329 En vikt med massan 0,1 kg är upphängd i en fjäder med fjäderkonstanten $k = 0,9$ N/m. Vikten påverkas av kraften $F = -ky$ då den befinner sig y meter från jämviktsläget. Med hjälp av kraftekvationen ($F = m \cdot a$) kan vi ställa upp differentialekvationen

$$y'' + \frac{k}{m}y = 0$$

- a) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen.
- b) Bestäm lösningen som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 6$.

3330 För vilka tal k kan den allmänna lösningen av differentialekvationen $y'' + 7y' + ky = 0$ skrivas i formen $y = e^{cx}(A \cos dx + B \sin dx)$? Motivera ditt svar.

3331 Visa att den karakteristiska ekvationen till differentialekvationen $ay'' + by' + cy = 0$ kan skrivas på formen $ar^2 + br + c = 0$.

C-UPPGIFTER

3332 Bestäm den lösning till $y'' - 2y' + 10y = 0$ som uppfyller $y(0) = 4$ och $y'(0) = 19$.

3333 En pendel består av en kula med massan m kg, som är upphängd i en tråd med längden L m. Krafterna som verkar på kulan ger differentialekvationen $mLy''(t) = -mg \sin y(t)$. Eftersom den differentialekvationen inte går att lösa med exakta metoder, så kan man för små vinklar y sätta $\sin y \approx y$, vilket ger $mLy'' + mgy = 0$.

- a) Sätt $g = 9,82$ och $L = 1,09$ m. Förenkla och bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen.
- b) Bestäm den lösning som uppfyller villkoren $y(0) = 0,5$ och $y'(0) = 2$.

3



Den inhomogena differentialekvationen

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

Differentialekvationen $y'' + 2y' - 3y = 2x$ innehåller andra termer än funktionen y och dess derivator och är därför ett exempel på en *inhomogen differentialekvation av andra ordningen*. Inhomogena differentialekvationer av andra ordningen löses på samma sätt som första ordningens inhomogena ekvationer. Man adderar en partikulärlösning med den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation.

Lösningen till $y'' + ay' + by = f(x)$

Den allmänna lösningen till den inhomogena differentialekvationen $y'' + ay' + by = f(x)$ är

$$y = y_h + y_p$$

där y_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation $y'' + ay' + by = 0$ och y_p är en partikulärlösning.



Exempel:

Ange en partikulärlösning till differentialekvationen $y'' + 2y' = 3x$.

Lösning:

När man deriverar ett polynom minskar polynomets grad med ett. Eftersom högerledet i differentialekvationen $y'' + y' = 3x$ är ett polynom av första graden och eftersom differentialekvationen saknar y -term, så antar vi att en partikulärlösning y_p är ett polynom av andra graden

$$y_p = ax^2 + bx + c$$

$$y'_p = 2ax + b$$

$$y''_p = 2a$$

Vi sätter in y_p , y'_p och y''_p i den ursprungliga differentialekvationen.

$$2a + 2(2ax + b) = 3x \quad \text{Förenkla}$$

$$2a + 4ax + 2b = 3x$$

som ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} 4a = 3 & (1) \\ 2a + 2b = 0 & (2) \end{cases}$$

Eftersom termen $4ax$ är den enda som innehåller x , så måste $4a = 3$.

Ekvation (1) ger $a = 3/4$

som insättes i ekvation (2)

$$2 \cdot \frac{3}{4} + 2b = 0 \quad \text{Lös ut } b$$

$$b = -\frac{3}{4}$$

Svar: En partikulärlösning är $y_p = \frac{3x^2}{4} - \frac{3x}{4}$

**Exempel:**Bestäm samtliga lösningar till $y'' + 4y' - 5y = x$ **Lösning:**

Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 + 4r - 5 = 0 \qquad r = -2 \pm \sqrt{2^2 + 5}$$

som har rötterna

$$r_1 = 1 \text{ och}$$

$$r_2 = -5$$

Lösningen till motsvarande homogena ekvation är

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-5x}$$

Eftersom högerledet är ett polynom av första graden och eftersom vänsterledet innehåller en y -term, så antar vi att ekvationen har en partikulärlösning av typen $y_p = ax + b$. Det ger $y'_p = a$ och $y''_p = 0$. Insättning i den ursprungliga ekvationen $y'' + 4y' - 5y = x$ ger

$$0 + 4a - 5(ax + b) = x \qquad \text{Förenkla}$$

$$-5ax + 4a - 5b = x$$

Termer av samma grad ska vara lika i båda led. Det ger oss att

$$\begin{cases} -5a = 1 & (1) \\ 4a - 5b = 0 & (2) \end{cases} \qquad -5ax = x$$

Ekvation (1) ger

$$-5a = 1 \qquad \text{Lös ut } a$$

$$a = -\frac{1}{5}$$

som insättes i ekvation (2)

$$4 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) - 5b = 0 \qquad \text{Lös ut } b$$

$$-\frac{4}{5} = 5b$$

$$b = -\frac{4}{25}$$

Vår partikulärlösning $y_p = ax + b$ blir

$$y_p = ax + b = -\frac{x}{5} - \frac{4}{25}$$

Samtliga lösningar får vi genom att addera lösningen till motsvarande homogena ekvation med partikulärlösningen.

$$y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{-5x} - \frac{x}{5} - \frac{4}{25}$$

Svar: Lösningen till differentialekvationen är $y = C_1 e^x + C_2 e^{-5x} - \frac{x}{5} - \frac{4}{25}$

A-UPPGIFTER

3334 Visa att

- a) $y_p = 5x + 1$ är en partikulärlösning till $y'' + y' - 3y = 2 - 15x$
b) $y_p = x^2 - 3$ är en partikulärlösning till $y'' - 4y = 14 - 4x^2$

3335 Visa att

- a) den allmänna lösningen till $y'' - 2y' + y = 2x - 7$ kan skrivas som $y = 2x - 3 + e^x(Cx + D)$.
b) den allmänna lösningen till $y'' + 6y' + 5y = 5x^2 + 12x + 7$ kan skrivas som $y = x^2 + 1 + Ce^{-x} + De^{-5x}$.

3336 Vilka av funktionerna y_1, y_2, y_3, y_4 bör man ansätta för att bestämma en partikulärlösning till differentialekvationen här nedanför? Para ihop respektive differentialekvation med passande ansats.

A $y'' - 9y' + 12y = x^2$

B $y'' + 8y = 4 - x$

C $y'' + 4y' = 5$

D $y'' + 9y' - 6y = 54$

Ansatser:

$$\begin{array}{ll} y_1 = a & y_2 = ax + b \\ y_3 = ax^2 + b & y_4 = ax^2 + bx + c \end{array}$$

3337 Bestäm en partikulärlösning till differentialekvationen

- a) $y'' + y' - y = 8 - 4x$
b) $y'' - y' + 2y = x^2 - x$
c) $y'' - y = 3 - x^2$

3338 Ange den allmänna lösningen till

- a) $y'' - 2y' - 3y = 6$
b) $y'' + 4y' + 4y = 8x$

3339 Ange den allmänna lösningen till

- a) $y'' + 4y' + 5y = 10$
b) $y'' - 14y' + 49y = 49x + 84$



B-UPPGIFTER

3340 Ange den allmänna lösningen till

- a) $3y'' = 12y' + 36$
b) $2y'' + 4y' + 10y = 30x + 32$

3341 Bestäm den lösning till $y'' + 4y' = 8x$ som uppfyller villkoren $y(0) = 0,5$ och $y'(0) = 7$.

3342 Bestäm en partikulärlösning till differentialekvationen $y'' + y' + 2y = 4 \sin x + 3 \cos x$.

3343 Maria har fått i uppgift att hitta en partikulärlösning till differentialekvationen $y'' - 6y = -18x^2$. Hon vill ansätta $y_p = ax^2$, eftersom hon tror att den ansatsen kommer att leda till ett korrekt resultat. Har hon rätt eller fel? Motivera ditt svar.

3344 Kan det finnas något tal k , så att $y = 2x + Ce^{-5x} + De^{5x}$ satisfierar differentialekvationen $y'' - ky = -50x$? Motivera ditt svar.

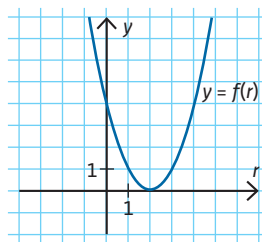
3345 En vikt som är upphängd i en fjäder svänger kring jämviktsläget. Om man bortser från att rörelsen dämpas, så kan den beskrivas med differentialekvationen $\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$, där x m är avståndet till jämviktsläget vid t s och k är fjäderkonstanten.

- Bestäm en lösning till differentialekvationen som uppfyller villkoret $x(0) = 0$.
- Hur stor blir viktens högsta fart?

3346 En odämpad svängning som påverkas av en drivande kraft $F = 2 \cos 3t$ kan beskrivas med differentialekvationen $\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 2 \cos 3t$ där y är avståndet från jämviktsläget vid tiden t sekunder. Bestäm lösningen till differentialekvationen.

C-UPPGIFTER

3347 Den karakteristiska ekvationen till differentialekvationen $y'' + ay' + by = x + 7$ kan skrivas i formen $f(r) = 0$. Figuren visar grafen till funktionen $f(r)$.



- Bestäm lösningen till den motsvarande homogena differentialekvationen med hjälp av figuren.
- Bestäm differentialekvationens allmänna lösning.

3

Diskutera och fundera

- ➔ Ge exempel på någon företeelse som ger upphov till en andra ordningens differentialekvation.
- ➔ Hur bestämmer man en allmän lösning till en inhomogen differentialekvation av andra ordningen?
- ➔ Vilka samband finns mellan rötterna till den karakteristiska ekvationen och motsvarande differentialekvations allmänna lösning?
- ➔ Vad kan man säga om den karakteristiska ekvationen, om $y = (C_1x + C_2)e^{4x}$ är den allmänna lösningen till motsvarande differentialekvation?
- ➔ Beskriv en inhomogen differentialekvation vars partikulärlösning är en funktion som beskriver en rät linje.
- ➔ Förklara varför differentialekvationen $y'' + 2y' = 3x$ kan ha fler än en partikulärlösning.