

## Prioriteringsregler

I teoritexten har vi valt att utgå från en konkret situation där vi visar att prioriteringsregler behövs för att ett matematiskt uttryck bara ska kunna tolkas på ett sätt. Visa gärna att man får ett helt annat svar om man genomför beräkningen  $695 + 3 \cdot 80$  från vänster till höger:

$$695 + 3 = 698$$

$$698 \cdot 80 = 55\,840$$

När man går igenom begreppen längst ner på sidan 22 i elevboken kan det vara bra att poängtera att även  $7 + 9$  kallas summa, inte bara resultatet 16. Det samma gäller begreppen differens, produkt och kvot.

Efter att ha arbetat med avsnittet ska eleverna kunna

- ▶ utföra delberäkningarna i rätt ordning om flera räknesätt ingår i en uppgift
- ▶ utföra beräkningar med huvudräkning

## Exempel

Beräkna utan att använda räknare

a)  $12 \cdot 5 + 2,5 \cdot 8$

b)  $25 - 11 - 9 + \frac{15}{3} + 6 \cdot 4$

## Lösning/Kommentar

a)  $12 \cdot 5 + 2,5 \cdot 8 =$

Vi skriver 8 som  $2 \cdot 4$  för att göra huvudräkningen lättare

$$= 12 \cdot 5 + 2,5 \cdot 2 \cdot 4 = \text{Multiplikation före addition}$$

$$= 60 + 5 \cdot 4 = 60 + 20 = 80$$

b)  $25 - 11 - 9 + \frac{15}{3} + 6 \cdot 4 =$

Multiplikation och division före addition och subtraktion

$$= 25 - 11 - 9 + 5 + 24 =$$

Vi grupperar additioner för sig och subtraktioner för sig

$$= 25 + 5 + 24 - 11 - 9 = 54 - 20 = 34$$

Exemplet ger möjlighet att lyfta fram både prioriteringsregler och huvudräkningsstrategier. I a)-uppgiften kan man lyfta fram att multiplikation med 5 är detsamma som att multiplicera med 10 och sedan dividera med 2 och att multiplikation med 8 är detsamma som att dubbla talet tre gånger.

I b)-uppgiften har vi, efter att multiplikationen och divisionen har utförts, valt att gruppera additioner för sig och subtraktioner för sig. En del elever förklarar  $24 - 11 - 9$  till  $24 - 2$ . Betona för dem att man ska subtrahera med både 11 och 9. Eleverna träffar på en liknande uppgift i **2108**.

## 2.1 De fyra räknesätten och prioriteringsreglerna

### Prioriteringsregler

Rebecca ska åka på musikfestival och räknar på vad det kommer att kosta. Om hon bokar i god tid kostar festivalpasset 695 kr och campingen kostar 80 kr per natt. Hon och kompisarna tänker stanna 3 nätter på campingen. Rebecca tänker så här:

”Till 695 kr lägger jag  $3 \cdot 80$  kr = 240 kr. Det blir 935 kr.”

### Prioriteringsregler

Rebeccas beräkning kan skrivas

$$695 + 3 \cdot 80$$

För att göra beräkningen behöver man veta i vilken ordning man ska utföra de fyra räknesätten. Ordningen bestäms av *prioriteringsreglerna*. Enligt prioriteringsreglerna beräknar man alltid multiplikation och division före addition och subtraktion.

### Prioriteringsregler

Om flera räknesätt ingår i en beräkning gör du delberäkningarna i följande ordning:

1. **Multiplikation och division**

2. **Addition och subtraktion**

Dessa prioriteringsregler har man kommit överens om för att man bara ska kunna tolka ett matematiskt uttryck på ett sätt.

### De fyra räknesätten

Talen i en beräkning har olika namn beroende på vilket räknesätt det gäller.

#### Addition

$$7 + 9 = 16$$

term + term = summa

#### Subtraktion

$$8 - 3 = 5$$

term - term = differens

#### Multiplikation

$$4 \cdot 5 = 20$$

faktor · faktor = produkt

#### Division

$$\frac{28}{8} = 3,5$$

täljare = kvot  
nämnare

## Kommentarer till bokens exempel

I det första exemplet på sidan 23 i elevboken visar vi två lösningsmetoder. I den första gör vi beräkningarna från vänster till höger. I den andra grupperar vi additionerna och subtraktionerna för sig. När man går igenom den andra lösningsmetoden kan man visa huvudräkningsstrategin att sortera termerna efter tiokompisar. Även när man multiplicerar kan sortering vara en bra strategi för att göra huvudräkningen lättare. Ett exempel är

$$2 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 4 = 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 9 = 10 \cdot 36 = 360$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Exempel:** Beräkna utan att använda räknare

a)  $12 - 7 - 3 + 8$       b)  $\frac{8}{4} + 3 \cdot 5 - 2 \cdot 3$

**Lösning:** a) **Metod 1**

$$12 - 7 - 3 + 8 = 5 - 3 + 8 = 2 + 8 = 10$$

Vi gör beräkningarna från vänster till höger

**Metod 2**

$$12 - 7 - 3 + 8 = 12 + 8 - 7 - 3 = 20 - 10 = 10$$

Vi grupperar additionerna för sig och subtraktionerna för sig

b) Vi beräknar multiplikation och division före addition och subtraktion

$$\frac{8}{4} + 3 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 2 + 15 - 6 = 11$$

**Exempel:** Anders köper 3,5 kg potatis för 8 kr/kg och 2 askar plommon för 20 kr per ask.

a) Skriv ett uttryck för hur mycket Anders ska betala.

b) Beräkna vad Anders ska betala.

**Lösning:** a)  $3,5 \cdot 8 + 2 \cdot 20$

$$b) 3,5 \cdot 8 + 2 \cdot 20 = \text{Multiplikation före addition}$$

$$= 28 + 40 = 68$$

Svar: Anders ska betala 68 kr.

## Starter

Karam har beräknat

$$302 - 2 \cdot 40$$

och fått resultatet 12 000.

a) Vad är det rätta resultatet?

b) Hur kan Karam ha tänkt?

Lös uppgifterna 2101–2108 utan räknare.

### NIVÅ 1

2101 Vilket av uttrycken i rutan är en

a) summa

b) differens

c) produkt

d) kvot

$$\begin{array}{r} 120 \\ 6 \\ \hline 0,23 + 0,55 \end{array} \quad \begin{array}{r} 93 - 70 \\ 22 \cdot 4 \end{array}$$

## Exempel

Stina har spelat nio banor minigolf och ska beräkna antalet slag. På två av banorna slog hon i bollen på två slag, på tre banor behövde hon fyra slag och på fyra banor sex slag. Ställ upp ett uttryck och beräkna det totala antalet slag.

## Lösning/Kommentar

$$2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 6 = 4 + 12 + 24 = 40$$

**Svar:** 40 slag

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Starter

**Svar:**

a) 222

b) Karam har nog tänkt att han ska utföra beräkningarna i den ordning de står i uppgiften. Han har alltså räknat  $302 - 2 = 300$  och sedan  $300 \cdot 40 = 12\,000$ .

## Alternativ starter

Vilka av beräkningarna ger samma svar?

A  $7 + 3 \cdot 2$

B  $4 \cdot 8 - \frac{19}{1}$

C  $\frac{15}{2} + 0 \cdot 6 + \frac{22}{4}$

D  $100 - 3 \cdot 25,5$

**Svar:** Alternativ **A**, **B** och **C** ger alla svaret 13.

## Gör en räkneresa

Ett sätt att inleda lektionen är att göra en räkneresa. Vid en räkneresa uppmanar du eleverna att steg för steg göra beräkningar i huvudet. Här är ett exempel:

- ▶ Börja med talet 13
- ▶ Addera 12
- ▶ Subtrahera 5
- ▶ Multiplicera med 3
- ▶ Dividera med 2

Om eleverna har räknat rätt har de fått talet 30.

Räkneresor fungerar bra som uppvärmning. Här finns goda möjligheter att konstruera räkneresorna så att de tränar viktiga huvudräkningsstrategier. Svårighetsgraden kan du enkelt variera efter elevgruppen. Låt gärna någon elev redovisa sina beräkningar och lyft en diskussion om eleverna har fått olika svar. Man kan också låta eleverna göra egna räkneresor, till exempel med ett på förhand givet svar. I *Prov, Övningsblad och Aktiviteter* har vi samlat flera räkneresor.

## Lästips

Cathy Humphreys & Ruth Parker (2016) *Making number talks matter*

## Aktivitet

Räkneresor

Tala om tal

## Kommentarer till uppgifterna

Många av uppgifterna i det här avsnittet är tänkta att lösas utan räknare. Det gör att eleverna får träna både på huvudräkning och på att hantera prioriteringsregler. För att eleverna ska bli vana att använda digitala verktyg, kan det vara klokt att låta dem kontrollera några av sina svar med räknare. Då kan man även uppmärksamma hur räknaren hanterar prioriteringsreglerna.

Uppgifterna i avsnittet är variationer på temat prioriteringsregler. När vi uttrycker division växlar vi i uppgifterna mellan att använda rakt och snett divisionsstreck. Uppgift 2105 liknar Startern och tränar resonemangsförmågan. Uppgift 2110 är en resonemangsuppgift som uppmärksammar att varje tecken "hör till" det efterföljande talet.

I uppgift 2109 och 2111 kan eleverna träna förmågan att tolka en realistisk situation och utforma en matematisk modell, även om det här rör sig om enkla exempel.

En fullt framkomlig väg för att lösa uppgift 2114 är att pröva sig fram, men med goda kunskaper i algebra kan man också göra en algebraisk lösning. Kanske kan några av eleverna upptäcka att det finns två möjliga lösningar.

### Exituppgift

1 Vad är  $7 \cdot 8$  ett exempel på?

- A en summa
- B en produkt
- C en kvot

2 Beräkna  $8 - 2 \cdot 3$

- A 18
- B 3
- C 2

3 Beräkna  $80 - 30 - 20$

- A 70
- B 30
- C 130

**Svar: B, C, B**

Genom att avsluta lektionen med en exituppgift kan du få en bild av vad eleverna har lärt sig. Det kan hjälpa dig att planera din fortsatta undervisning. Låt gärna eleverna lösa exituppgifterna via ett digitalt responssystem eller på miniwhiteboards. Uppgifterna kan även ges utan alternativsvar.

2102 Beräkna  
a)  $6 + 4 \cdot 3$       b)  $9 \cdot 4 + 3 \cdot 7$   
c)  $\frac{30}{5} - \frac{12}{2}$       d)  $3 + 16/8$

2103 Den första termen är 22. Den andra termen är 12. Beräkna termernas  
a) summa      b) differens

2104 Beräkna  
a)  $\frac{15}{2} + 3 \cdot 7$       b)  $6 - 1 \cdot 5$   
c)  $12 - 4 + 9 \cdot 2$       d)  $\frac{6}{6} + 2 \cdot 12 - 5 \cdot 0$

2105 Petra har fått i uppgift att beräkna  $100 - 25 \cdot 2$ . Hon får resultatet 150.  
a) Vad kan hon ha gjort för fel?  
b) Vilket är det rätta resultatet?

2106 Beräkna  
a)  $\frac{0}{7} + 3 \cdot 4$       b)  $\frac{3}{1} - 2 \cdot 1,5$

2107 Beräkna  
a)  $10 \cdot 9 - 3 \cdot 20 - 7$   
b)  $5 \cdot 8 + 18/2 - 49/7$

2108 Beräkna  
a)  $45 - 15 + 25 - 35$   
b)  $14 + 6 - 8 - 2$   
c)  $9 - 3 + 30 - 13 + 20 - 1 - 12 + 10$

2109 Elin köper 4 påsar godis för 17 kr/st, 12 glasspinnar för 9 kr/st, 5 paket kex för 21 kr/st och 3 flaskor saft för 22 kr/st.  
a) Beskriv kostnaden för Elin's inköp med ett enda matematiskt uttryck.  
b) Beräkna vad Elin ska betala.

2110 Ailin har gjort beräkningen  $30 - 8 + 2 = 30 - 10 = 20$ . Förklara vad hon har gjort för fel.

2111 Karin köper 4 gängjärn som kostar 79 kr per styck. Hon betalar med en 500-lapp.  
a) Skriv ett uttryck för hur mycket hon ska få tillbaka.  
b) Beräkna hur mycket hon får tillbaka.

### NIVÅ 2

2112 Med symbolerna  $\cdot$  och  $+$  och talen 3, 4 och 5 kan du skriva olika matematiska uttryck. Ett exempel är  $3 + 4 \cdot 5$ . Vilka olika resultat kan du få om du låter talen eller tecknen byta plats?

2113 Liam och Noel ska utföra beräkningen  $4 \cdot 7 - 5 \cdot 2$ , men de blir osams om hur den ska göras. Liam anser att svaret är 18, medan Noel tycker att svaret är 46.  
a) Vem har rätt?  
b) Vad kan den andre ha gjort för fel?

### NIVÅ 3

2114 Produkten av två tal är 600. Talens kvot är 24. Vilken är talens differens?



## Övningsblad

De fyra räknesätten och prioriteringsreglerna  
Huvudräkningsstrategier

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Parenteser

Fyra kompisar köper var sin pizza för 80 kr och var sin läsk för 20 kr. Man kan beräkna hur mycket de sammanlagt ska betala på två olika sätt. Det ena sättet är att först räkna ut vad fyra pizzor kostar och vad fyra läsk kostar och därefter lägga ihop de två beloppen:

$$4 \cdot 80 \text{ kr} + 4 \cdot 20 \text{ kr} = 320 \text{ kr} + 80 \text{ kr} = 400 \text{ kr}$$

Det andra sättet är att räkna ut hur mycket det kostar per person och sedan multiplicera det med fyra:

$$4 \cdot (80 \text{ kr} + 20 \text{ kr}) = 4 \cdot 100 \text{ kr} = 400 \text{ kr}$$

Parenteser i uttryck Som du ser har vi fört in en parentes i uttrycket. Det är en signal om att den beräkningen ska göras först. Vi lägger till det i prioriteringsreglerna.

### Prioriteringsregler

Om flera räknesätt och en eller flera parenteser ingår i en beräkning, så gör du delberäkningarna i följande ordning:

1. Parenteser
2. Multiplikation och division
3. Addition och subtraktion

Exempel: Beräkna utan att använda räknare

a)  $8 \cdot (3 + 2) - 12 \cdot (9 - 6)$   
b)  $\frac{23 + 27}{5}$

Lösning: a)  $8 \cdot (3 + 2) - 12 \cdot (9 - 6) =$  Parenteser beräknas först  
 $= 8 \cdot 5 - 12 \cdot 3 =$  Multiplikation före subtraktion  
 $= 40 - 36 = 4$

b) Uttrycket  $\frac{23 + 27}{5}$  innehåller inga synliga parenteser, men det finns en underförstådd parentes i täljaren. Den ska prioriteras på samma sätt som en synlig parentes.

$$\frac{23 + 27}{5} = \frac{(23 + 27)}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

## Exempel

Jens och Petter köper var sin hamburgare med strips. Hamburgaren kostar 59 kr och strips 14 kr. Jens köper dessutom en liten cola för 15 kr, medan Petter väljer en stor för 19 kr. Hur mycket får de tillbaka om de betalar med två hundralappar?

### Lösning/Kommentar

$$200 - (2 \cdot (59 + 14) + 15 + 19) =$$
$$= 200 - (2 \cdot 73 + 15 + 19) = 200 - 180 = 20$$

**Svar:** 20 kr

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Parenteser

I detta avsnitt får eleverna träna på att hantera parenteser i numeriska uttryck. Vissa uttryck har underförstådda parenteser, t.ex.  $\frac{23 + 27}{2}$ , som har en underförstådd parentes i täljaren. När eleverna använder räknare behöver de placera ut dessa underförstådda parenteser själva.

Många elever använder sina mobiltelefoner för att göra beräkningar. Undersök gärna gemensamt hur mobiltelefonerna hanterar parenteser och prioriteringsregler.

Efter att ha arbetat med avsnittet ska eleverna kunna

- ▶ utföra delberäkningarna i rätt ordning om en eller flera parenteser ingår i en uppgift
- ▶ uppmärksamma, och vid behov placera ut, underförstådda parenteser

### Exempel

Beräkna

a)  $3 \cdot (15 + 5) - (11 + 40)$

b)  $5 \cdot 6 - \frac{14}{2} + \frac{45}{27 - 18}$

### Lösning/Kommentar

a)  $3 \cdot (15 + 5) - (11 + 40) =$  Parenteser beräknas först  
 $= 3 \cdot 20 - 51 = 60 - 51 = 9$

b)  $5 \cdot 6 - \frac{14}{2} + \frac{45}{(27 - 18)} =$

Det finns en underförstådd parentes i nämnaren. Vi beräknar den först.

$$= 5 \cdot 6 - \frac{14}{2} + \frac{45}{9} = 30 - 7 + 5 = 28$$

Visa gärna hur man slår in beräkningen i b)-uppgiften på räknaren och uppmärksamma att eleverna själva måste skriva in underförstådda parenteser.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Kommentarer till bokens exempel

I exemplet på sidan 26 i elevboken visar vi hur man beräknar värdet av uttryck som har underförstådda parenteser. Vi gör beräkningarna både med och utan räknare. En bra grundregel är att alltid sätta ut parentes runt uttryck i täljaren och nämnaren när man använder räknaren. Att använda räknaren får eleverna träna på i exempelvis uppgift 2116 och 2122.

### Starter

#### Svar:

- a) 94  
b)  $(5 + 8) \cdot 12 - 9 + \frac{5 + 3}{4} = 149$

Uppmärksamma gärna den underförstådda parentesen i sista termens täljare.

Vill man utvidga den andra deluppgiften kan man låta eleverna placera parentesen så att värdet av uttrycket blir så litet som möjligt. Om någon elev väljer att sätta parentesen enligt

$$5 + 8 \cdot (12 - 9) + \frac{5 + 3}{4}$$

får man även tillfälle att prata om att man i skriven text kan utelämnas multiplikationstecknet före en parentes. Ofta skriver man ju i stället

$$5 + 8(12 - 9) + \frac{5 + 3}{4}$$

### Alternativ starter

Visa att du med hjälp av högst fyra treor och de fyra räknesätten kan skapa alla hela tal från 1 till 10.

Svar: T.ex.

$1 = \frac{3}{3}$	$2 = 3 - \frac{3}{3}$
$3 = \frac{3 + 3 + 3}{3}$	$4 = 3 + \frac{3}{3}$
$5 = \frac{3 + 3}{3} + 3$	$6 = 3 + 3$
$7 = 3 + 3 + \frac{3}{3}$	$8 = 3 \cdot 3 - \frac{3}{3}$
$9 = 3 \cdot 3$	$10 = 3 \cdot 3 + \frac{3}{3}$

**Exempel:** Beräkna  $4 \cdot 3 - \frac{10}{2} + \frac{24}{11-3}$

- a) utan räknare  
b) med räknare

**Lösning:** Det finns en underförstådd parentes i nämnaren i den sista divisionen.

a)  $4 \cdot 3 - \frac{10}{2} + \frac{24}{(11-3)} =$  Vi markerar den underförstådda parentesen och beräknar den först  
 $= 4 \cdot 3 - \frac{10}{2} + \frac{24}{8} =$  Multiplikation och division före addition och subtraktion  
 $= 12 - 5 + 3 = 10$

- b) När vi utför beräkningen med räknaren, sätter vi parentes runt  $11 - 3$ .  
 $4 * 3 - 10 / 2 + 24 / (11 - 3)$   
 Resultatet blir 10.

Räknare tar inte hänsyn till underförstådda parenteser. Det måste du göra själv! Om du står in beräkningen utan parentes, så får du fel resultat.

### Starter

- a) Beräkna värdet av uttrycket  
 $5 + 8 \cdot 12 - 9 + \frac{5 + 3}{4}$   
 b) Placera in en parentes i uttrycket så att värdet av uttrycket blir så stort som möjligt.

### NIVÅ 1

2115 Beräkna utan räknare

- a)  $3 \cdot 4 - 2$       b)  $3 \cdot (4 - 2)$   
 c)  $3 + 4 \cdot 2$       d)  $(3 + 4) \cdot 2$

2116 Beräkna  $\frac{32}{6+2}$

- a) utan räknare  
b) med räknare

2117 Med hjälp av en räknare beräknar Adam  $\frac{100}{1+99}$

Han får svaret 199.

- a) Vad kan han ha gjort för fel?  
b) Vilket är det rätta svaret?

2118 Beräkna

- a)  $18 + 12/4 + 2$   
b)  $\frac{18+12}{4+2}$

2119 Beräkna utan räknare

- a)  $2 \cdot (3 + 12) - \frac{12}{6}$   
 b)  $(5 \cdot 4 - 3 \cdot 6) \cdot 8$   
 c)  $(5 - 3) \cdot (2 + 1)$   
 d)  $2 \cdot (4 - 1) + (8 - 1)$

### Kommentarer till uppgifterna

I uppgift 2120 får eleverna tolka en realistisk situation och översätta den till ett matematiskt uttryck. I uppgift 2128 får eleverna göra det omvända: tolka ett matematiskt uttryck och berätta vilken situation det beskriver.

Det är inte rätt svar som är i fokus i 2125. Syftet är i stället att resonera om hur man kan se att svaret är orimligt. Uppgiften passar därför bra för en par- eller helklassdiskussion.

2120 Henrik köper 4 pocketböcker på rea. Priset har sänkts från 99 kr/st till 54 kr/st.  
 a) Skriv ett uttryck för den totala prissänkningen på Henriks 4 böcker.  
 b) Beräkna den totala prissänkningen.

2121 Vilket tal ska stå i rutan för att likheten ska gälla?  
 a)  $(9 - \square) \cdot (5 + 2) = 35$   
 b)  $26 = 14 + 3 \cdot 5 - (4 \cdot \square - 5)$

2122 Beräkna  $\frac{4 \cdot 4 - 6}{2 + 3 \cdot 1}$  med räknare.

### NIVÅ 2

2123 Beräkna utan räknare

- a)  $\frac{9 \cdot 4 - 4 \cdot 4}{4}$   
 b)  $5 \cdot (7 - 3) - (5 \cdot 7 - 5 \cdot 3)$   
 c)  $7 \cdot \left(\frac{64}{8} - \frac{45}{9}\right) + 10 \cdot (7 \cdot 8 - 4 \cdot 9)$   
 d)  $\frac{78 + 21}{6 \cdot 6 - 5 \cdot 7} + \frac{12 \cdot 4 - 8 \cdot 6}{33}$

2124 Sätt ut en parentes så att likheten gäller.

- a)  $4 \cdot 6 - 5 = 4$   
b)  $23 = 36/4 \cdot 7 - 3 + 2 \cdot 8$

### Resonemang och begrepp

#### Sant eller falskt

Avgör om påståendena är sanna eller falska.

- Man ska alltid beräkna subtraktion före addition.
- I beräkningen  $3 \cdot 4/2$  spelar det ingen roll om man beräknar multiplikationen eller divisionen först.
- Uttrycket  $2 \cdot 30/15 \cdot 4$  har värdet 1.

#### Fundera och förklara

- Ge exempel på två tal som har samma summa som produkt.
- Sätt ut parenteser i uttrycket  $4 \cdot 7/4 + 9 + 6/5 - 2 \cdot 3 - 2$  så att svaret blir 8.
- Förklara varför man behöver prioriteringsregler i matematiken.

### Exempel

Placera in talen 1–8 i rutorna så att värdet av uttrycket blir så litet som möjligt.

$$\square + \square \cdot (\square - \square) + \frac{\square}{\square} - (\square - \square)$$

### Lösning/Kommentar

- Kan någon elev hitta något mindre än detta
- $3 + 7 \cdot (1 - 8) + \frac{4}{5} - (6 - 2)?$

Här är det inte bara svaret som är viktigt, utan att man hittar en bra strategi för att lösa denna typ av uppgifter. Uppgiften kan utvidgas till att sätta in talen 1–8 så att värdet av uttrycket blir så stort som möjligt eller så nära 0 som möjligt.

### Exituppgift

Var ska parentesen placeras i uttrycket  $2 + 8 \cdot 3 - 1 = 18$  för att likheten ska stämma?

- A  $(2 + 8) \cdot 3 - 1 = 18$   
 B  $2 + 8 \cdot (3 - 1) = 18$   
 C  $2 + (8 \cdot 3) - 1 = 18$

Svar: B

### Svar till Resonemang och begrepp

#### Sant eller falskt

- Falskt, addition och subtraktion får man räkna i valfri ordning.
- Sant, i båda fallen blir resultatet 6. För att undvika tvetydigheter när räkneoperationerna har samma prioritet brukar man dock utföra beräkningarna från vänster till höger.
- Falskt, värdet av uttrycket är  $2 \cdot 30/15 \cdot 4 = 60/15 \cdot 4 = 4 \cdot 4 = 16$ .

Med parenteser runt täljare och nämnare får uttrycket däremot värdet 1:

$$(2 \cdot 30)/(15 \cdot 4) = 60/60 = 1$$

#### Fundera och förklara

- $2 + 2 = 2 \cdot 2$  och  $0 + 0 = 0 \cdot 0$
- $4 \cdot 7/4 + (9 + 6)/5 - 2 \cdot (3 - 2) = 8$
- Vi har prioriteringsregler i matematiken för att man bara ska kunna tolka ett matematiskt uttryck på ett sätt.

### Övningsblad

Prioriteringsregler och parenteser

#### Aktivitet

Memory med prioriteringsregler



## Addition och subtraktion med negativa tal

I det här avsnittet repeterar vi negativa tal, tecknen för *större än* och *mindre än* samt addition och subtraktion med negativa tal. När man storleksordnar tal, både positiva och negativa, kan tallinjen vara ett bra stöd. En del elever behöver det stödet för att inse att  $-6 < -4$ .

Vi har valt att relativt snabbt komma in på addition och subtraktion med negativa tal. För elever som behöver träna mer på det grundläggande begreppet negativa tal finns ett övningsblad.

Efter att ha jobbat med avsnittet ska eleverna kunna

- ▶ storleksordna positiva och negativa tal
- ▶ utföra addition och subtraktion med negativa tal

## Kommentarer till teorin

I vår formulering av räkneregler för addition och subtraktion med negativa tal, har vi valt att undvika teckenregler som ”minus minus blir plus”, eftersom vi tror att de lätt kan missuppfattas av elever. Att subtraktion av ett negativt tal ger samma resultat som en addition kan i stället troliggöras med följande mönster:

$$\begin{aligned} 4 - 2 &= 2 \\ 4 - 1 &= 3 \\ 4 - 0 &= 4 \\ 4 - (-1) &= ? \\ 4 - (-2) &= ? \end{aligned}$$

Om mönstret ska fortsätta bör de saknade talen vara 5 och 6, samma resultat som man får med beräkningarna  $4 + 1$  respektive  $4 + 2$ .

Det är vanligt att åskådliggöra additioner och subtraktioner på tallinjen. Vi upplever att representationen är mest intuitiv för elever när vi adderar eller subtraherar ett *positivt* tal. Vår erfarenhet är också att man bör vara lite försiktig med att använda vardagliga metaforer, som exempelvis termometer eller ekonomisk skuld, när man förklarar räkneregler för negativa tal. Metaforen kan nämligen sällan utvidgas till att förklara alla tänkbare beräkningar eller räknesätt, vilket gör att eleven behöver hantera flera olika metaforer och förstå när de kan användas.

## 2.2 Negativa tal

### Addition och subtraktion med negativa tal

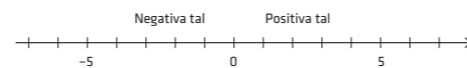
**Negativa tal** När vi anger en temperatur eller en ekonomisk skuld använder vi ibland tal som är mindre än noll. Vi kallar dem *negativa tal*. I beräkningen  $4 - 7 = -3$  är resultatet  $-3$  ett negativt tal.

**Minustecken** Vi använder minustecken för att beteckna negativa tal. Men minustecknet används också för räkneregler för subtraktion.

$$4 - 7 = -3$$

Negativt tal  
Subtraktion

**Jämföra tal** De negativa talen ligger till vänster om talet 0 på tallinjen. Ju längre till vänster, desto mindre tal.



När man jämför storleken på tal kan man använda ord eller symboler:

Ord:	Symbol:
5 är större än 2	$5 > 2$
-3 är mindre än 3	$-3 < 3$
-4 är mindre än -0,1	$-4 < -0,1$

**Räkneregler** När man gör beräkningar med negativa tal följer man vissa regler. Här nedanför sammanfattar vi reglerna för addition och subtraktion.

### Räkneregler för addition och subtraktion med negativt tal

<b>Addition med negativt tal</b> Addition med ett negativt tal motsvaras av en minskning $25 + (-10) = 25 - 10 = 15$
<b>Subtraktion med negativt tal</b> Subtraktion med ett negativt tal motsvaras av en ökning $25 - (-10) = 25 + 10 = 35$

## Minustecknets olika betydelser

I elevboken använder vi minustecken dels som tecken för operationen subtraktion, dels för att beteckna ett negativt tal. Det är inte alltid helt lätt för eleverna att hålla isär minustecknets olika betydelser. I uttrycket  $8 - 3$  tolkar en del elever 3 som ett negativt tal, fastän det handlar om en subtraktion mellan två positiva tal. Det kan vara en god idé att jämföra detta uttryck med uttrycket  $8 + (-3)$  och lyfta fram att uttrycken har olika betydelser, trots att svaren blir desamma. Att minustecknet har olika betydelser framkommer på ett tydligare sätt på engelska där uttrycket  $8 - (-3)$  utläses ”eight minus negative three”.

Räknare har ofta olika knappar för räkneregler för subtraktion och för negativt tal och kan därför fungera som metodiskt hjälpmedel för att visa att ett minustecken kan ha olika betydelser. Låt eleverna undersöka vad som händer om de använder fel knapp på räknaren när de utför beräkningar som  $-6 + 7$ .

**Exempel:** Beräkna utan räknare

- a)  $8 - 12$     b)  $-8 + 12$     c)  $-20 + 15$

**Lösning:** a)  $8 - 12 = -4$     b)  $-8 + 12 = 4$     c)  $-20 + 15 = -5$

**Exempel:** Beräkna utan räknare

- a)  $13 + (-7)$     b)  $13 - (-7)$     c)  $-13 - 7$

**Lösning:** a)  $13 + (-7) = 13 - 7 = 6$  Addition med ett negativt tal motsvaras av en minskning  
b)  $13 - (-7) = 13 + 7 = 20$  Subtraktion med ett negativt tal motsvaras av en ökning  
c)  $-13 - 7 = -20$

**Exempel:** Tabellen visar temperaturen i Västerås en dag i mars.

Hjalmar beräknar  $5 - (-3)$ .

- a) Vad är det han har beräknat?  
b) Vad blir resultatet av beräkningen?

Klockslag	Temperatur
06.00	-3 °C
12.00	5 °C
18.00	0 °C

**Lösning:** a) Hjalmar har beräknat skillnaden mellan den högsta och den lägsta temperaturen.  
b)  $5 - (-3) = 5 + 3 = 8$  Subtraktion med ett negativt tal motsvaras av en ökning  
Svar: Resultatet blir 8. Skillnaden mellan den högsta och den lägsta temperaturen är 8 °C.

### Starter

a) Ge exempel på en addition som ger resultatet  $-7$ .

b) Ge exempel på en subtraktion där båda termerna är negativa och differensen är  $-7$ .

Lös uppgifterna utan räknare.

### NIVÅ 1

2201 Vilket tal är störst?

- a)  $-1$  eller  $1$     b)  $-3$  eller  $-7$   
c)  $0$  eller  $-1$     d)  $-0,0002$  eller  $-200\,000$

## Exempel

Beräkna utan räknare

- a)  $5 - 10$     b)  $-5 + 10$   
c)  $-5 + (-10)$     d)  $-5 - (-10)$

### Lösning/Kommentar

- a)  $-5$     b)  $5$     c)  $-15$     d)  $5$

## Exempel

Den högsta utomhustemperaturen som man har uppmätt i Sverige är  $38,0$  °C och den lägsta temperaturen som har uppmätts är  $-52,6$  °C. Vilken är temperaturskillnaden mellan den högsta och den lägsta temperaturen?

### Lösning/Kommentar

$$38,0 \text{ °C} - (-52,6 \text{ °C}) = 38,0 \text{ °C} + 52,6 \text{ °C} = 90,6 \text{ °C}$$

**Svar:**  $90,6$  °C

## Starter

**Svar:**

- a) T.ex.  $2 + (-9) = -7$  eller  $-9 + 2 = -7$   
b) T.ex.  $-15 - (-8) = -7$

Låt gärna eleverna ge en mångfald av exempel. Då kan de se att resultatet av en addition eller en subtraktion kan vara negativ även om

- ▶ båda termerna är positiva
- ▶ ena termen är negativ
- ▶ båda termerna är negativa

## Alternativ starter

Storleksordna värdet av följande uttryck. Börja med det minsta

- A  $2 - 3$   
B  $-5 + 3$   
C  $-6 + 6,5$   
D  $4 - 5,5$   
E  $-7,2 + 7,2$

**Svar:** B, D, A, E, C

## Övningsblad

Negativa tal

Addition och subtraktion med negativa tal 1

Addition och subtraktion med negativa tal 2

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Lästips

Ingvar O Persson behandlar i artikeln *Om negativa tal* (Nämnamnaren 2007:2) några svårigheter med att undervisa om negativa tal. I artikeln *Två tänkbara modeller för undervisning om negativa tal* (Nämnamnaren 2007:3) tar han upp alternativa sätt att presentera addition och subtraktion av negativa tal.

### Kommentarer till uppgifterna

I uppgift 2211 ska eleverna ge exempel på när negativa tal förekommer i vardagslivet. Några möjliga exempel är ekonomiska skulder, att gå under par i golf, målskillnad i sport och tidsskillnaden mellan olika världsdelar. Vill man utvidga uppgiften kan man låta eleverna fundera på om de har stött på negativa tal i sina yrkesämnen.

Uppgifterna 2215 och 2216 tränar resonemangsförmågan och förmågan att kommunicera matematiska tankegångar. Här kan du som lärare få en överblick av vilka oklarheter som finns och hjälpa till att reda ut eventuella missuppfattningar.

### Exituppgift

1 Storleksordna följande tal, börja med det minsta

3   -0,3   -1   -3   -1,3

2 Beräkna

- a)  $-10 - 15$
- b)  $6 + (-6)$
- c)  $-7 - (-8)$

Svar:

1 -3   -1,3   -1   -0,3   3

2 a) -25

b) 0

c) 1

2202 Vilka tal är markerade på tallinjen?



2203 Beräkna

- a)  $8 - 5$
- b)  $5 - 8$
- c)  $-5 - 8$
- d)  $-5 + 8$

2204 Beräkna

- a)  $15 - 25$
- b)  $-15 - 25$
- c)  $-9 + 12$
- d)  $-12 + 9$

2205 Klara och Olga spelar datorspel. Tabellen visar resultatet från de tre första omgångarna.

Omgång	1	2	3
Klara	-12p	-3p	25p
Olga	11p	-17p	15p

Beräkna det sammanlagda antalet poäng för

- a) Klara
- b) Olga

2206 Hur många graders skillnad är det mellan temperaturerna?

- a)  $+7^\circ\text{C}$  och  $+2^\circ\text{C}$
- b)  $+5^\circ\text{C}$  och  $-4^\circ\text{C}$
- c)  $-3^\circ\text{C}$  och  $-10^\circ\text{C}$
- d)  $-18^\circ\text{C}$  och  $+2^\circ\text{C}$

2207 Beräkna

- a)  $8 + (-5)$
- b)  $8 - (-5)$
- c)  $20 + (-35)$
- d)  $20 - (-35)$

2208 Beräkna

- a)  $-7 + (-3)$
- b)  $-3 - (-7)$
- c)  $-2 - (-10)$
- d)  $-12 - (-10)$

2209 Om mönstret fortsätter, vilket är nästa tal?

- a)  $-11, -8, -5, -2, \dots$
- b)  $7, 3, -1, -5, \dots$

2210 Lisa och Pelle har beräknat  $(-7) + (-8)$ .

Lisa har fått svaret 15 och Pelle har fått svaret -15. Hur kan de ha tänkt? Har någon av dem rätt?

2211 Ge två exempel på när man stöter på negativa tal i vardagslivet.

2212 Vilket tal ska stå i rutan?

- a)  $5 - \square = -23$
- b)  $-5 - \square = 11$

#### NIVÅ 2

2213 Beräkna

- a)  $-5 + 6 - 11$
- b)  $-7 - 8 - 9$
- c)  $-(-1) - 11 - (-2)$
- d)  $-8 - (-15) - 7$

2214 Temperaturen förändras från  $-12^\circ\text{C}$  till  $-19^\circ\text{C}$ .

- a) Beräkna  $-19 - (-12)$
- b) Vad har du beräknat i a)?



2215 a) Kan summan av två negativa tal vara positiv? Motivera.

b) Kan differensen mellan två negativa tal vara positiv? Motivera.

2216 Ge exempel på en addition där summan är -6 och där

- a) båda termerna är negativa
- b) den ena termen är positiv och den andra är negativ

#### Multiplikation med ett positivt och ett negativt tal

### Multiplikation och division med negativa tal

Multiplikation är ett sätt att beräkna upprepad addition. Vi ser till exempel att

$$5 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$$

På samma sätt är

$$3 \cdot (-2) = (-2) + (-2) + (-2) = -6$$

En multiplikation med ett positivt tal och ett negativt tal ger alltid ett negativt resultat.

#### Multiplikation med två negativa tal

En regel för multiplikation med två negativa tal kan man finna genom att undersöka mönster:

Ena faktorn minskar med 1	$3 \cdot (-5) = -15$ $2 \cdot (-5) = -10$ $1 \cdot (-5) = -5$ $0 \cdot (-5) = 0$ $(-1) \cdot (-5) = ?$ $(-2) \cdot (-5) = ?$	Resultatet ökar med 5
---------------------------	---	-----------------------

Vi ser att resultatet på varje rad ökar med 5. Om vi vill att mönstret ska fortsätta, så borde de två saknade resultaten vara 5 och 10.

$$(-1) \cdot (-5) = 5$$

$$(-2) \cdot (-5) = 10$$

En multiplikation med två negativa tal ger alltid ett positivt resultat.

#### Räkne regler

Vi kan sammanfatta räkne reglerna för multiplikation med negativa tal så här:

#### Räkne regler för multiplikation med negativa tal

Två faktorer med olika tecken ger en negativ produkt.

$$(-3) \cdot 4 = -12 \quad 3 \cdot (-4) = -12$$

Två faktorer med lika tecken ger en positiv produkt.

$$3 \cdot 4 = 12 \quad (-3) \cdot (-4) = 12$$

### Multiplikation och division med negativa tal

Att produkten av ett positivt tal och ett negativt tal är negativ, brukar gå bra att förklara med hjälp av upprepad addition. Det är också den metod vi har valt att presentera i elevboken. Att använda skulder som metafor är också möjligt. De flesta elever inser att om man är skyldig fyra personer 5 kr var, så har man en total skuld på 20 kr. Men när man ska förklara att produkten av två negativa tal är ett positivt tal, inser man metaforens begränsning. I elevboken har vi därför valt att troliggöra räkne regeln för multiplikation av två negativa tal med hjälp av mönster.

Efter att ha arbetat med avsnittet ska eleverna kunna utföra multiplikation och division med negativa tal

### Historik: Negativa tal

Negativa tal förekom tidigt i flera kulturer, även om begreppet negativt tal saknades. I Kina användes ett sätt att räkna med negativa tal redan ca 100 f.Kr. i samband med affärs- och skatteberäkningar. Försäljningssummor var positiva (pengar in) och representerades med röda siffror medan köpesummor var negativa (pengar ut) och representerades med svarta siffror.

Matematiken i antikens Grekland grundades på geometriska idéer och därför saknade de negativa talen betydelse. Den grekiske matematikern Diofantos (ca 200 e.Kr.) beskriver i sin skrift *Arithmetica* lösningen till ekvationen  $4 = 4x + 20$  som absurd.

Den indiske matematikern Brahmagupta använde på 600-talet begreppen tillgång och skuld för att beskriva positiva och negativa tal. Han införde också talet noll och ställde upp regler för hur man räknar med både talet noll och negativa tal – regler som i stort sett överensstämmer med de som används i dag. Brahmagupta använde även ett speciellt tecken för negativa tal.

Under 1600-talet var det fortfarande många matematiker som vägrade att acceptera negativa tal som verkliga tal eller som rötter till ekvationer. Det var inte förrän på 1800-talet som de negativa talen accepterades fullt ut.

### Kommentarer till teorin

Räknereglerna för division med negativa tal motiveras vi i teoritexten med att multiplikation och division är motsatta räknesätt. Sambandet kan tydliggöras på följande sätt:

$$\frac{12}{3} = 4 \text{ eftersom } 4 \cdot 3 = 12$$

$$\frac{12}{-3} = -4 \text{ eftersom } (-4) \cdot (-3) = 12$$

$$\frac{-12}{3} = -4 \text{ eftersom } (-4) \cdot 3 = -12$$

$$\frac{-12}{-3} = 4 \text{ eftersom } 4 \cdot (-3) = -12$$

### Exempel

Beräkna utan räknare

a)  $8 \cdot (-3)$                       b)  $(-8) \cdot (-3)$

c)  $\frac{-36}{-12}$                                 d)  $\frac{-25}{2 - (-3)}$

### Lösning/Kommentar

a)  $8 \cdot (-3) = -24$   
En negativ faktor ger en negativ produkt

b)  $(-8) \cdot (-3) = 24$   
Två negativa faktorer ger en positiv produkt

c)  $\frac{-36}{-12} = 3$   
Lika tecken på täljare och nämnare ger en positiv kvot

d)  $\frac{-25}{2 - (-3)} =$   
Den underförstådda parenteser i nämnaren beräknas först

$$= \frac{-25}{5} = -5$$

Olika tecken på täljare och nämnare ger en negativ kvot

I a)- respektive d)-uppgiften kan man uppmärksamma att  $8 \cdot (-3) = (-8) \cdot 3$  och att  $\frac{-25}{5} = \frac{25}{-5}$

**Division med negativa tal** Man kan säga att multiplikation och division är motsatta räknesätt. Därför får vi liknande regler för division med negativa tal, som vid multiplikation med negativa tal.

#### Räkne regler för division med negativa tal

Olika tecken på täljare och nämnare ger en negativ kvot  
 $\frac{-12}{3} = -4$      $\frac{12}{-3} = -4$     ← Eftersom  $(-3) \cdot (-4) = 12$

Lika tecken på täljare och nämnare ger en positiv kvot  
 $\frac{12}{3} = 4$      $\frac{-12}{-3} = 4$     ← Eftersom  $(-3) \cdot 4 = -12$

**Exempel:** Beräkna utan räknare

a)  $6 \cdot (-7)$     b)  $(-6) \cdot (-7)$     c)  $\frac{-36}{9}$     d)  $\frac{-36}{-9}$

**Lösning:** a)  $6 \cdot (-7) = -42$  Olika tecken på de två faktorerna ger en negativ produkt

b)  $(-6) \cdot (-7) = 42$  Lika tecken på de två faktorerna ger en positiv produkt

c)  $\frac{-36}{9} = -4$  Olika tecken på täljare och nämnare ger en negativ kvot

d)  $\frac{-36}{-9} = 4$  Lika tecken på täljare och nämnare ger en positiv kvot

**Exempel:** Beräkna

a)  $5 - \frac{-8}{2}$     b)  $\frac{-63}{(-3) \cdot (-7)}$

Subtraktion med ett negativt tal motsvaras av en ökning

**Lösning:** a)  $5 - \frac{-8}{2} = 5 - (-4) = 5 + 4 = 9$

Utför divisionen först. Olika tecken på täljare och nämnare ger negativ kvot

b)  $\frac{-63}{(-3) \cdot (-7)} = \frac{-63}{21} = -3$  Multiplicera talen i nämnaren först

Lika tecken på två faktorer ger en positiv produkt

### Starter

Vilka alternativ ger ett positivt resultat?

$(-3) \cdot (-10)$	$\frac{-9}{-2}$
$18 + 4 \cdot (-5)$	$1700 - \frac{1800}{-1}$

### NIVÅ 1

2217 Beräkna utan räknare

a)  $8 \cdot 4$                       b)  $8 \cdot (-4)$   
c)  $(-8) \cdot 4$                 d)  $(-8) \cdot (-4)$

2218 Beräkna utan räknare

a)  $9 \cdot (-2)$                 b)  $(-6) \cdot (-3)$   
c)  $(-5) \cdot 7$                 d)  $(-36) \cdot 0$

2219 Beräkna utan räknare

a)  $\frac{21}{7}$                               b)  $\frac{-21}{7}$   
c)  $\frac{21}{-7}$                             d)  $\frac{-21}{-7}$

2220 Beräkna utan räknare

a)  $\frac{8}{-2}$                               b)  $\frac{-42}{-6}$   
c)  $\frac{-36}{3}$                             d)  $\frac{0}{-7}$

2221 Ge exempel på två negativa tal som ger

a) produkten 12    b) kvoten 5

2222 Vilket tal ska stå i rutan?

a)  $7 \cdot \square = -28$     b)  $30 = (-5) \cdot \square$   
c)  $-56 = \square \cdot (-8)$     d)  $\square \cdot (-2) = 24$

2223 Vilket tal ska stå i rutan?

a)  $\frac{-18}{\square} = -9$                 b)  $-7 = \frac{49}{\square}$   
c)  $4 = \frac{\square}{-3}$                       d)  $\frac{\square}{-5} = -8$

2224 Man beräknar medeltemperaturen under en vecka genom att addera alla de uppmätta dygnsmedeltemperaturerna och dividera summan med antalet dagar.

Vad blir medeltemperaturen om de uppmätta värdena är  
 $+4^\circ\text{C}$      $-3^\circ\text{C}$      $+2^\circ\text{C}$      $+3^\circ\text{C}$   
 $-3^\circ\text{C}$      $-4^\circ\text{C}$      $-6^\circ\text{C}$

### NIVÅ 2

2225 Beräkna utan räknare

a)  $4 \cdot (-2) \cdot (-3)$     b)  $\frac{28}{-7} + 5$   
c)  $9 - \frac{-12}{-3} + \frac{-22}{2}$     d)  $(-6) \cdot (-3) \cdot (-5)$

2226 En djupfryst pizza med temperaturen  $-17^\circ\text{C}$  sätts i ugnen. Pizzans temperatur stiger till  $-5^\circ\text{C}$  på 2 minuter och fortsätter sedan att stiga i samma takt.

a) Vad är pizzans temperatur 10 minuter efter att den har satts in i ugnen?  
b) Hur lång tid tar det för pizzan att bli  $75^\circ\text{C}$ ?



### Starter

**Svar:** Alla beräkningar förutom  $18 + 4 \cdot (-5)$  ger positivt resultat.

Startern övar prioriteringsregler och räkne reglerna för multiplikation och division med negativa tal.

### Alternativ starter

a) Produkten av två tal är  $-100$ . Vilka kan talen vara?

b) Kvoten av två tal är 1. Vilka kan talen vara?

**Svar:**  
a) T.ex.  $-10$  och  $10$  eller  $-2,5$  och  $40$ .

b) T.ex.  $9$  och  $9$ ,  $-9$  och  $-9$  eller  $-0,01$  och  $-0,01$ .

Här är det en fördel att eleverna får ge många olika exempel. Utmana dem gärna att hitta exempel som inte är heltal. Man kan också låta dem formulera vad som är gemensamt för svaren i a)- respektive b)-uppgiften. I a)-uppgiften är alltid ett av talen negativt. I b)-uppgiften har båda talen samma värde.

### Kommentarer till uppgifterna

De inledande uppgifterna har ett starkt fokus på procedur- och begrepps förmågan. De senare uppgifterna, på alla nivåer, tränar problemlösning och resonemang.

Uppgift 2224 handlar om medelvärde. Det är ett begrepp som bör vara bekant för eleverna sedan tidigare, men som vi inte behandlar förrän i kapitel 5. Därför har vi i uppgiften påmint om hur medelvärde beräknas.

Uppgift 2226 kan vara en lämplig uppgift för att jämföra lösningsmetoder. Förutom numeriska lösningar kan man tänka sig grafiska lösningar och lösningar där man använder sig av en tabell.

### Kommentarer till uppgifterna

Många elever förlitar sig på enstaka exempel när de ska motivera sitt svar i uppgift 2228. Utmana dem gärna att föra ett mer allmängiltigt resonemang.

I uppgift 2230 och 2231 på Nivå 3 är det meningen att eleverna ska kunna svara på frågorna utan att utföra beräkningarna. Uppgifterna fokuserar hur talens tecken avgör om en produkt eller en kvot blir positiv eller negativ.

### Exituppgift

Beräkna

a)  $-6 \cdot 3$       b)  $20 + \frac{16}{-2}$       c)  $-5 - \frac{-20}{-4}$

**Svar:** a) -18    b) 12    c) -10

### Svar till Resonemang och begrepp

#### Sant eller falskt

- ⊗ Falskt,  $12 - 10 + 5 = 7$
- ⊗ Sant, -30 ligger längre till vänster på tallinjen än -25.
- ⊗ Sant,  $-7 - (-9) = -7 + 9 = 2$
- ⊗ Falskt,  $5 + 5 = 10$  medan  $-5 - 5 = -10$
- ⊗ Falskt. Eftersom produkten  $(-438) \cdot (-377)$  är positiv, är täljaren positiv. En positiv täljare och negativ nämnare ger en negativ kvot.
- ⊗ Sant, ett udda antal negativa faktorer ger en negativ produkt.

#### Fundera och förklara

- ⇒ Minustecknet framför 5:an betecknar ett negativt tal. Minustecknet mellan 7 och 3 betecknar räknesättet subtraktion.
- ⇒ Talet 1.
- ⇒ Ola försöker troligen beskriva att en subtraktion med ett negativt tal kan ses som en addition, t.ex  $5 - (-3) = 5 + 3 = 8$ .

### Övningsblad

Multiplikation och division med negativa tal

#### Aktivitet

Luffarschack med negativa tal

2227 Det finns ett samband mellan talen ..., 14, -28, 56, -112, ...

- a) Hur får man nästa tal i raden?
- b) Vilka tal saknas i början och i slutet av raden?

2228 Nicolina säger att produkten av tre negativa tal alltid är negativ. Melinda säger att produkten av fyra negativa tal alltid är positiv. Har någon av dem rätt? Motivera ditt svar.

2229 Beräkna utan räknare

- a)  $(-4) \cdot (-3) + (5 - 7) - \frac{50}{-5}$
- b)  $-5 - (-5) + \frac{37 - 39}{-2} + \frac{32}{-4}$
- c)  $\frac{18 - 22}{4} - (-7 - 3) - (-3) \cdot (-3)$
- d)  $20 - \frac{15}{-1 - 2} + (10 - 16) + (-2) \cdot (-3) \cdot (-4)$

#### NIVÅ 3

2230 Vilket tal är störst? Besvara frågan utan att utföra beräkningen.

$$a = (-9) \cdot (-9) \cdot (-9) \cdot (-9)$$

$$b = (-19) \cdot (-19) \cdot (-19)$$

2231 Blir resultatet av beräkningen mer än 100? Besvara frågan utan att utföra beräkningen.

$$\frac{(-350) \cdot (-470)}{(-2) \cdot (-3) \cdot (-4)}$$

2232 Använd alla talen -8, -10, 2 och 4 samt några av de fyra räknesätten och skapa

- a) ett så stort tal som möjligt
- b) ett så litet tal som möjligt
- c) ett tal så nära 0 som möjligt

### Resonemang och begrepp

#### Sant eller falskt

Avgör om påståendena är sanna eller falska utan att använda räknare.

- ⊗ När man beräknar  $12 - 10 + 5$  blir svaret negativt.
- ⊗ -30 är mindre än -25.
- ⊗ När man beräknar  $-7 - (-9)$  får man resultatet 2.
- ⊗ När man beräknar  $5 + 5$  och  $-5 - 5$  får man samma svar.
- ⊗ När man beräknar  $\frac{(-438) \cdot (-377) \cdot 268}{-92}$  blir svaret positivt.
- ⊗ En multiplikation med trettiosju negativa faktorer ger en negativ produkt.

#### Fundera och förklara

⊗ Vilka olika betydelser har minustecknen i uttrycket  $-5 + 7 - 3$ ?

⊗ Vilket heltal ligger mitt emellan -3 och 5?

⊗ Ola försöker förklara för Pernilla hur man räknar med negativa tal. Han säger: "Om det står minus, minus, så är det plus." Vad är det han försöker beskriva?



## Addition och subtraktion av bråk

Även om eleverna har arbetat med bråk i grundskolan, finns det fortfarande många som tycker att det är svårt att addera eller subtrahera bråk med olika nämnare. Kanske är detta moment allra viktigast för de elever som ska fortsätta läsa matematik och arbeta med rationella uttryck i algebra. Samtidigt bidrar arbetet med bråk till att stärka elevernas talförståelse och avsnittet kan vara ett bra tillfälle att öva elevernas rimlighetsuppskattning.

Efter att ha arbetat med avsnittet ska eleverna kunna

- addera och subtrahera bråk
- växla mellan att skriva tal i bråkform och i blandad form

### Exempel

Emma och Oskar ska åka och hälsa på sin mormor. Emma kör först  $\frac{4}{9}$  av sträckan och sedan kör Oskar  $\frac{2}{7}$  av sträckan.

- Hur stor andel av sträckan har de kört tillsammans?
- Hur stor andel har de kvar att köra?

### Lösning/Kommentar

- De har kört  $\frac{4}{9} + \frac{2}{7}$ . För att kunna addera de två bråken måste vi skriva dem med samma nämnare

$$\frac{4}{9} + \frac{2}{7} = \frac{4 \cdot 7}{9 \cdot 7} + \frac{2 \cdot 9}{7 \cdot 9} = \frac{28}{63} + \frac{18}{63} = \frac{28 + 18}{63} = \frac{46}{63}$$

**Svar:** De har kört  $\frac{46}{63}$  av sträckan.

- De har kvar  $1 - \frac{46}{63}$  av sträckan att köra.

$$1 - \frac{46}{63} = \frac{63}{63} - \frac{46}{63} = \frac{17}{63}$$

**Svar:** De har kvar  $\frac{17}{63}$  av sträckan.

### Bråk med samma nämnare

#### Addition och subtraktion av bråk

Du minns kanske från tidigare att du kan addera bråk med samma nämnare genom att helt enkelt addera täljarna

$$\frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{2+3}{8} = \frac{5}{8}$$

Motsvarande gäller för subtraktion

$$\frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{4-1}{5} = \frac{3}{5}$$

### Bråk med olika nämnare

Om däremot nämnarna är olika, måste vi först skriva bråken med samma nämnare.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Vi förlänger så att bråken får samma nämnare

Vi förkortar med 3 och svarar i enklaste form

#### Addition och subtraktion av bråk

För att kunna addera och subtrahera bråk måste bråken ha samma nämnare.

### Bråkform och blandad form

Talet  $\frac{11}{10}$  är skrivet i *bråkform*. Vi ser här att täljaren är större än nämnaren. Det betyder att talet är större än en hel. Ett sådant bråk kan skrivas i *blandad form*.

$$\frac{11}{10} = 1 \frac{1}{10} \quad \text{10 tiondelar är lika mycket som 1 hel}$$

Bråkform      Blandad form

När man skriver ett bråk i blandad form skriver man det med både ett heltal och ett bråk.

**Exempel:** a) Skriv talet  $\frac{17}{3}$  i blandad form.

b) Skriv talet  $3 \frac{4}{5}$  i bråkform.

**Lösning:** a)  $\frac{17}{3} = \frac{15}{3} + \frac{2}{3} = 5 + \frac{2}{3} = 5 \frac{2}{3}$       3 går 5 gånger i 17. Då blir det 5 hela.

b)  $3 \frac{4}{5} = 3 + \frac{4}{5} = \frac{15}{5} + \frac{4}{5} = \frac{19}{5}$       Vi skriver 3 hela som  $\frac{15}{5}$  för att få samma nämnare

**Exempel:** Beräkna

a)  $1 - \frac{4}{7}$       b)  $\frac{5}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9}$       c)  $\frac{3}{4} - \frac{1}{6}$

**Lösning:** a)  $1 - \frac{4}{7} = \frac{7}{7} - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$

Vi skriver 1 hel som  $\frac{7}{7}$

b) Eftersom bråken har samma nämnare kan vi addera täljarna.

$$\frac{5}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{5+2+3}{9} = \frac{10}{9} = \frac{10}{9} = 1 \frac{1}{9}$$

Vi svarar i enklaste form

c) Bråken har olika nämnare. Vi förlänger bråken så att de får samma nämnare.

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{7}{12}$$

Vi förlänger bråken så att de får samma nämnare

**Exempel:** På en skola är  $\frac{2}{9}$  av eleverna vegetarianer,  $\frac{1}{12}$  veganer och resten äter kött. Hur stor andel av eleverna

- är vegetarianer eller veganer
- äter kött

**Lösning:** a) Andelen elever som är vegetarianer eller veganer får vi genom att addera dessa andelar.

$$\frac{2}{9} + \frac{1}{12} = \frac{2 \cdot 4}{9 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{8}{36} + \frac{3}{36} = \frac{11}{36}$$

Svar:  $\frac{11}{36}$  av eleverna är vegetarianer eller veganer.      36 är en gemensam nämnare

b) Resten av eleverna äter kött.

$$1 - \frac{11}{36} = \frac{36}{36} - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}$$

Svar:  $\frac{25}{36}$  av eleverna äter kött.      1 (en hel) motsvarar alla elever

## Rimlighet och förståelse

Det är viktigt att eleverna får en god förståelse för de metoder som de använder och att de inte endast förlitar sig på regelkunskap. Exemplet här nedanför kan belysa detta och även visa betydelsen av att kontrollera sina svar. I exemplet ska eleverna bedöma en lösning, föra ett eget resonemang och sedan själva ge en lösning.

### Exempel

Petter beräknar  $\frac{2}{5} - \frac{1}{3}$  och får svaret  $\frac{1}{2}$

- Vad tror du Petter har gjort för fel?
- Förklara för Petter hur beräkningen ska utföras.
- Hur kan Petter direkt se att hans svar är orimligt?

### Lösning/Kommentar

- Petter har troligtvis subtraherat täljarna med varandra och nämnarna med varandra på

följande felaktiga sätt:  $\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{2-1}{5-3} = \frac{1}{2}$

- Petter måste först skriva om bråken så att de får samma nämnare och sedan subtrahera. Den minsta gemensamma nämnaren för bråken är 15.

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{1}{15}$$

- Eftersom  $\frac{2}{5}$  är mindre än  $\frac{1}{2}$  och  $\frac{1}{3}$  ska subtraheras från det, kan svaret inte bli  $\frac{1}{2}$ .

### Att tänka på

I matematiken finns många konventioner, som t.ex. att man inte skriver ut multiplikationstecken mellan faktorerna i exempelvis  $4x$  och  $4(1+x)$ . Vid bråk i blandad form är i stället konventionen att uttrycket  $1 \frac{1}{3}$  betyder  $1 + \frac{1}{3}$ . Det är inte helt lätt för eleverna att hålla isär detta. Det kan därför vara på sin plats att tydliggöra skrivsättet av bråk i blandad form.



## Starter

Svar:

a) Eftersom  $\frac{7}{6}$  är större än 1 och  $\frac{3}{5}$  ska adderas till det, kan svaret inte vara mindre än 1.

b) Hon har adderat täljarna för sig och nämnarna för sig.

$$c) \frac{3}{5} + \frac{7}{6} = \frac{18}{30} + \frac{35}{30} = \frac{53}{30} = 1 \frac{23}{30}$$

Den här uppgiften synliggör en känd missuppfattning vid addition av bråk.

## Alternativ starter

$$\frac{5}{8} + \frac{7}{\square}$$

a) Ge exempel på nämnare som kan stå i rutan om summan av bråken ska vara större än 1.

b) Beräkna summan av dina bråk.

Svar:

a) T.ex. 1 eller 18 eller något heltal däremellan.

b) Om vi väljer nämnaren 18, så är summan av bråken

$$\frac{5}{8} + \frac{7}{18} = \frac{5 \cdot 9}{8 \cdot 9} + \frac{7 \cdot 4}{18 \cdot 4} = \frac{45}{72} + \frac{28}{72} = \frac{73}{72} = 1 \frac{1}{72}$$

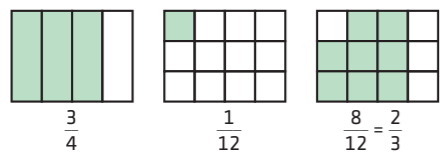
## Kommentarer till uppgifterna

Uppgifterna i detta och följande avsnitt fokuserar på att eleverna ska befästa bråkbegreppet och träna på att hantera beräkningar med bråk. Eleverna får också träna på att växla mellan bråkform och blandad form.

I flera av uppgifterna får eleverna först göra en uppskattning av svaret innan de utför beräkningen. På så sätt vill vi aktivera elevernas rimlighetsuppfattning.

## Tips

Att rita bilder kan ibland innebära att en svårare bråkuppgift kan lösas ganska lätt. Uppgift 2448 b) kan till exempel illustreras med följande bild:



## Starter

Karin säger att  $\frac{3}{5} + \frac{7}{6} = \frac{10}{11}$

- Hur kan man se att svaret är orimligt?
- Vad har Karin gjort för fel?
- Vad är det rätta svaret?

Lös uppgifterna utan räknare.

## NIVÅ 1

2443 Beräkna och svara i enklaste form

- $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$
- $\frac{11}{12} - \frac{5}{12}$
- $\frac{9}{17} + \frac{8}{17}$
- $\frac{3}{8} + \frac{5}{8} - \frac{7}{8}$

2444 Skriv i blandad form

- $\frac{5}{4}$
- $\frac{12}{7}$
- $\frac{23}{6}$
- $\frac{29}{3}$

2445 Skriv i bråkform

- $2\frac{1}{3}$
- $5\frac{1}{2}$
- $4\frac{3}{5}$
- $7\frac{5}{6}$

2446 Vilma ska räkna ut  $2 - \frac{6}{5}$

- Bör svaret bli större eller mindre än 1?
- Utför beräkningen.

2447 Joel ska räkna ut  $\frac{2}{3} + \frac{5}{6}$

- Bör svaret bli större eller mindre än 1?
- Utför beräkningen.

2448 Beräkna och svara i enklaste form

- $1 - \frac{7}{11}$
- $\frac{3}{4} - \frac{1}{12}$
- $\frac{4}{5} + \frac{3}{10}$

56 TAL • 2.4 BRÅK

2449 Beräkna och svara i blandad form

- $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$
- $\frac{3}{4} + \frac{2}{5}$
- $4\frac{1}{2} - \frac{1}{5}$

2450 Anna och Mia har klippt var sin del av en gräsmatta. Anna har klippt  $\frac{2}{7}$  och Mia har klippt  $\frac{5}{8}$  av gräsmattan.

- Hur stor andel av gräsmattan har Anna och Mia klippt sammanlagt?
- Hur stor andel av gräsmattan är kvar att klippa?

## NIVÅ 2

2451 Vilket bråk ska adderas till  $\frac{3}{8}$  för att summan ska bli  $\frac{13}{16}$ ?

2452 Vilket bråk ska subtraheras från  $\frac{7}{12}$  för att differensen ska bli  $\frac{1}{4}$ ?

2453 Förklara (utan att utföra beräkningarna) vilka av följande beräkningar som ger ett resultat

- större än 1
- mindre än 0
- större än 0 men mindre än 0,5

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \\ \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \\ \frac{10}{11} - \frac{9}{10} \\ 3 - \frac{10}{3} \\ \frac{5}{9} + \frac{2}{4} \end{array}$$

## NIVÅ 3

2454 Under pågående prov säger läraren att en tredjedel av provtiden har gått. Efter ytterligare 20 minuter säger hon: "Nu har halva provtiden gått." Hur länge pågick provet?

## Multiplikation av bråk

Multiplikation av heltal och bråk

Om du ska beräkna  $4 \cdot \frac{2}{9}$ , så kan du göra så här:

$$4 \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{2+2+2+2}{9} = \frac{8}{9}$$

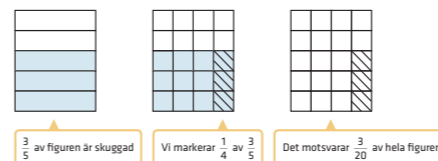
Vi ser att vi får samma resultat med beräkningen

$$\frac{4 \cdot 2}{9} = \frac{8}{9}$$

När vi multiplicerar ett heltal med ett bråk kan vi alltså multiplicera täljaren med helalet.

Multiplikation av två bråk

Vi ska nu se hur man kan gå till väga för att multiplicera två bråk med varandra. Att utföra beräkningen  $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5}$  är detsamma som att beräkna en fjärdedel av tre femtedelar. För att ta reda på resultatet av beräkningen ritas vi en figur.



Med figurens hjälp ser vi att

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$$

Samma resultat får vi om vi multiplicerar täljarna för sig och nämnarna för sig:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20}$$

Vi får följande regler för multiplikation av bråk:

## Räkneregler för multiplikation av bråk

- När man multiplicerar ett heltal med ett bråk, multiplicerar man täljaren med helalet.  $4 \cdot \frac{2}{15} = \frac{4 \cdot 2}{15} = \frac{8}{15}$
- När man multiplicerar två bråk, multiplicerar man täljarna för sig och nämnarna för sig.  $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 7} = \frac{6}{35}$

TAL • 2.4 BRÅK 57

## Multiplikation av bråk

Att hitta ett vardagligt exempel på när man använder multiplikation av bråk är inte helt lätt, men man kan multiplicera ett bråk och ett heltal när man vill beräkna en andel av ett antal. Multiplikation av bråk är även en viktig förkunskap i kapitlet om sannolikhet. Där förekommer multiplikation av två bråk när man ska multiplicera två sannolikheter.

För att konkretisera innebörden av multiplikation av två bråk använder vi bilder. Det kan vara en bra idé att ta upp bilden på sidan 57 i elevboken till diskussion.

- Efter att ha arbetat med avsnittet ska eleverna kunna
  - multipliera bråk

## Uppvärmning

Som en uppföljning av tidigare bråkavsnitt kan man inleda lektionen med följande övning. Eleverna kan jobba ensamma eller två och två. De ska följa instruktionerna steg för steg. När man kommer till det sista steget får eleverna jämföra sina tal med varandra. Övningen kan också användas som Exituppgift till förra avsnittet.

- Skriv talet 0,4 i bråkform
- Förläng det talet med 4
- Förkorta med 2
- Addera med  $\frac{2}{3}$
- Skriv talet i enklaste form
- Skriv ditt nya tal i blandad form
- Vilket är nu ditt tal?

Svar:  $1 \frac{1}{15}$

## Att tänka på

I samband med att man går igenom regelrutorna på sidan 57 i elevboken kan man visa att de två räkneregler kan sammanfattas i en enda regel. Vid multiplikation med ett heltal kan man ju alltid skriva om helalet som ett bråk med nämnaren 1, t.ex.  $4 = \frac{4}{1}$ .

Vid multiplikation av bråk multiplicerar man täljare för sig och nämnare för sig. Att addera täljare och täljare respektive nämnare och nämnare vid addition är däremot inte en gångbar metod. Det kan vara lämpligt att kontrastera räkneregler för multiplikation och addition av bråk mot varandra.

## Exituppgift

Beräkna

1  $\frac{2}{7} + \frac{4}{7}$

A  $\frac{6}{7}$

B  $\frac{6}{14}$

C  $1 \frac{1}{7}$

2  $3 - 2\frac{2}{5}$

A  $1\frac{3}{5}$

B  $\frac{1}{5}$

C  $\frac{3}{5}$

3  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

A  $\frac{2}{6}$

B  $\frac{5}{8}$

C  $\frac{3}{4}$

Svar: A, C, C

## Övningsblad

Addition och subtraktion av bråk

### Exempel

Beräkna och svara i enklaste form.

a)  $4 \cdot \frac{3}{7}$       b)  $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}$       c)  $\frac{4}{27} \cdot \frac{9}{8}$

### Lösning/Kommentar

a)  $4 \cdot \frac{3}{7} = \frac{4 \cdot 3}{7} = \frac{12}{7}$

b)  $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 5} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

c)  $\frac{4}{27} \cdot \frac{9}{8} = \frac{4 \cdot 9}{27 \cdot 8} = \frac{36}{216} = \frac{36/36}{216/36} = \frac{1}{6}$

Jämför med att förkorta i ett tidigare led:

$$\frac{4}{27} \cdot \frac{9}{8} = \frac{4 \cdot 9}{27 \cdot 8} = \frac{\overset{1}{4} \cdot \overset{1}{9}}{\overset{3}{27} \cdot \overset{2}{8}} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6}$$

I c)-uppgiften visar vi att det kan underlätta beräkningarna att genomföra förkortningen redan i ett mellanled.

### Exempel

$\frac{9}{10}$  av de pengar som Rädda barnen samlar in går till välgörenhet. År 2015 gick  $\frac{2}{9}$  av dessa pengar till att ge barn trygghet och skydd.

- a) År 2015 samlade man in 1 257 miljoner. Hur många miljoner gick till välgörenhet?  
 b) Hur stor andel av de insamlade pengarna gick till att ge barn trygghet och skydd?

### Lösning/Kommentar

a) Vi beräknar  $\frac{9}{10}$  av 1 257 miljoner.

$$\frac{9}{10} \cdot 1\,257 = \frac{9 \cdot 1\,257}{10} = \frac{11\,313}{10} \approx 1\,131 \text{ miljoner kr}$$

b) Vi beräknar  $\frac{2}{9}$  av  $\frac{9}{10}$ .

$$\frac{2}{9} \cdot \frac{9}{10} = \frac{2 \cdot \overset{1}{9}}{\overset{1}{9} \cdot 10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$\frac{1}{5}$  av de insamlade pengarna gick alltså till barns trygghet och skydd.

I a)-uppgiften är det naturligt för många elever att först dividera med 10 och sedan multiplicera med 9. Visa gärna att det ger samma svar som att multiplicera med  $\frac{9}{10}$ .

En alternativ lösningsmodell i b)-uppgiften är först beräkna hur många miljoner som gick till barns trygghet och skydd och därefter beräkna andelen genom att dividera med det hela, 1 257 miljoner.

**Exempel:** Beräkna och svara i enklaste form.

a)  $\frac{5}{7} \cdot 3$       b)  $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{11}$

**Lösning:** a)  $\frac{5}{7} \cdot 3 = \frac{5 \cdot 3}{7} = \frac{15}{7} = 2 \frac{1}{7}$  Täljaren multipliceras med heltalet

Du kan också tänka så här:  $\frac{5}{7} \cdot 3 = \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{1} = \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 1} = \frac{15}{7}$

b)  $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{11} = \frac{3 \cdot 4}{8 \cdot 11} = \frac{12}{88} = \frac{3}{22}$  Vi multiplicerar täljarna för sig och nämnarna för sig

Du kan förkorta med 4 redan här:  $\frac{3 \cdot \overset{1}{4}}{8 \cdot 11} = \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 11} = \frac{3}{22}$

**Exempel:** En spindelled har gått sönder på Sandras epa-traktor och en ny kostar 480 kr. Hennes mamma lovar att betala  $\frac{5}{8}$  av priset. Hur mycket ska Sandra betala?

**Lösning:** Om Sandras mamma betalar  $\frac{5}{8}$ , så betyder det att Sandra ska betala  $1 - \frac{5}{8} = \frac{8}{8} - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

**Metod 1**  
 $\frac{1}{8}$  av 480 kr =  $\frac{480 \text{ kr}}{8} = 60 \text{ kr}$   
 $\frac{3}{8}$  av 480 kr =  $3 \cdot 60 \text{ kr} = 180 \text{ kr}$

**Metod 2**  
 $\frac{3}{8}$  av 480 kr =  $\frac{3}{8} \cdot 480 \text{ kr} = \frac{3 \cdot 480 \text{ kr}}{8} = \frac{1\,440 \text{ kr}}{8} = 180 \text{ kr}$   
 Svar: Sandra ska betala 180 kr.

### Starter

Vilken produkt är störst?

$\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8}$      $\frac{1}{8} \cdot \frac{5}{3}$      $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}$      $3 \cdot \frac{1}{8}$

Lös uppgifterna utan räknare.

### NIVÅ 1

**2455** Beräkna och svara i enklaste form

a)  $3 \cdot \frac{2}{18}$     b)  $21 \cdot \frac{1}{7}$     c)  $\frac{5}{4} \cdot 2$

### Starter

**Svar:** Produkterna  $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8}$  och  $\frac{1}{8} \cdot \frac{5}{3}$  är lika med  $\frac{5}{24}$

och är därmed större än den tredje produkten  $\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{8}$  som är lika med  $\frac{3}{40}$ . Allra störst är dock produkten

$3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ . Det kan man se om man förlänger till

tjugofjärdedelar:  $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$ .

### Alternativ starter

Ge exempel på vilket bråk A kan vara om  $\frac{2}{5} \cdot A$  är

- a) mindre än 1  
 b) större än 1  
 c) lika med 1

**Svar:** a) T.ex.  $A = \frac{1}{3}$     b) T.ex.  $A = \frac{7}{2}$     c) T.ex.  $A = \frac{5}{2}$

**2456** Beräkna och svara i enklaste form

a)  $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$     b)  $\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{4}$   
 c)  $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4}$     d)  $\frac{12}{7} \cdot \frac{14}{3}$

**2457** Vilka av uttrycken är lika med  $\frac{1}{3}$ ?

$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$      $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{10}$      $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{12}$      $\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{9}$

**2458** En flaska innehåller  $\frac{1}{3}$  liter. Hur mycket innehåller 12 sådana flaskor?

**2459** Hur mycket är  $\frac{2}{5}$  av 105 kr?

**2460** Förklara skillnaden mellan att multiplicera ett bråk med 5 och att förlänga samma bråk med 5.

**2461** I en klass med 33 elever är andelen vänsterhänta  $\frac{2}{11}$ .

- a) Bestäm andelen högerhänta.  
 b) Hur många högerhänta finns i klassen?

### NIVÅ 2

**2462** Den vanligaste guldhalten i smycken är 18 karat. Det betyder att smycket innehåller  $\frac{18}{24}$  rent guld.

- a) Hur mycket rent guld finns det i ett smycke som väger 48 gram?  
 b) Hur mycket rent guld finns det i ett smycke som väger lika mycket, men som är tillverkat i 23 karats guld?

**2463** Vilket är talet som multiplicerat med  $\frac{5}{6}$  ger produkten  $\frac{5}{12}$ ?

**2464** Vilka produkter är mindre än  $\frac{5}{7}$ ?

$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$      $\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{6}$      $\frac{2}{7} \cdot 2$   
 $\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{7}$      $\frac{5}{7} \cdot \frac{6}{7}$      $\frac{7}{7} \cdot \frac{5}{9}$   
 $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{7}$      $\frac{5}{7} \cdot \frac{8}{5}$      $\frac{8}{9} \cdot \frac{5}{7}$

**2465** Ett företag ska få ett nytt datasystem. De anställda ska få utbildning enligt följande plan:

- Steg 1** Alla anställda  
**Steg 2**  $\frac{3}{4}$  av dem som gått steg 1  
**Steg 3**  $\frac{1}{3}$  av dem som gått steg 2  
 Hur stor andel av alla anställda kommer att gå steg 3?

**2466** Två tredjedelar av platserna i ett mindre flygplan är fönsterplatser. En tiondel av fönsterplatserna är Business Class. Hur stor andel av alla platserna är både fönsterplats och Business Class?

**2467** Beräkna

a)  $\frac{1}{6} \cdot \frac{6}{1}$     b)  $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}$     c)  $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4}$   
 d) Vilket tal ska man multiplicera  $\frac{3}{17}$  med för att få resultatet 1?

### NIVÅ 3

**2468** Vilket är talet som multiplicerat med  $\frac{3}{7}$  ger produkten  $\frac{1}{14}$ ?



### Kommentarer till uppgifterna

Elever som har svårt för uppgift **2458** kan vara hjälpta av att rita en bild. I **2460** uppmärksammar vi skillnaden mellan att förlänga och multiplicera ett bråk med 5. Låt gärna eleverna förklara skillnaden för varandra.

Både **2463** på Nivå 2 och **2468** på Nivå 3 är problemlösningssuppgifter av liknande karaktär men på olika nivåer. Elever som behöver mer utmaning kan få i uppgift att skapa liknande uppgifter till varandra.

I uppgift **2464** ska eleverna avgöra vilka av produkterna som är mindre än  $\frac{5}{7}$ . Det är inte meningen att eleverna ska genomföra alla multiplikationer. I stället är tanken att de ska kunna besvara frågan med hjälp av sin taluppfattning. De kan till exempel inse att om  $\frac{5}{7}$  multipliceras med ett bråk som är mindre än 1, så blir resultatet mindre än  $\frac{5}{7}$ .

Den sista uppgiften på Nivå 2, **2467**, uppmärksammar vad som händer när man multiplicerar inverterade tal. Uppgiften passar bra som en förberedelse för avsnittet om division av bråk.

### Exituppgift

Hur mycket är  $\frac{2}{5}$  av  $\frac{1}{4}$ ?

**Svar:**  $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

### Övningsblad

Multiplikation av bråk

### Aktivitet

Tärningsspel med bråk

Problemlösning med bråk

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Division av bråk

Det är inte säkert att alla elever har mött division av bråk under sin grundskoletid. Det behandlas i vissa högstadieläromedel som fördjupning. Även vi har valt att markera bråkdivision som fördjupning, eftersom det finns få situationer i vardagsliv och yrkesliv där bråkdivision används. Det här avsnittet är främst viktigt för dem som ska läsa mer matematik eller har matematikintensiva karaktärsämnen. Om du erbjuder avsnittet till hela undervisningsgruppen, enstaka elever eller inte alls, är en avvägning du själv gör som lärare.

För att eleverna ska förstå teorigenomgången på sidan 60 i elevboken behöver de förstå att beräkningen  $(1/2)/(1/6)$  ger svaret på hur många sjätte-delar det finns i en halv. Då tolkar vi kvoten som en innehållsdivision. För att konkretisera divisionen använder vi oss av en bild. Att genomgående arbeta med bilder i det här avsnittet kan stärka elevernas begreppsförståelse.

Efter att ha jobbat med avsnittet ska eleverna kunna

- dividera bråk

## Att tänka på

I teoritexten har vi valt att visa hur man utför en bråkdivision genom att multiplicera med det inverterade talet till nämnaren. Den metoden fungerar oavsett om nämnaren är ett bråk eller ett heltal. När nämnaren är ett heltal, kan man dock utföra divisionen på andra sätt:

När täljaren är sådan att divisionen med heltalet går jämnt ut, kan man dividera täljaren med heltalet.

$$\frac{4}{5} \div 2 = \frac{2}{5} \quad \text{Hälften av } \frac{4}{5} \text{ är } \frac{2}{5}$$

När täljaren är sådan att divisionen med heltalet inte går jämnt ut, kan man först förlänga bråket i täljaren innan man utför divisionen:

$$\frac{1}{5} \div 2 = \frac{2}{10} \div 2 = \frac{1}{10} \quad \text{Hälften av } \frac{1}{5} \text{ är } \frac{1}{10}$$

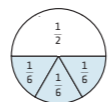
De här metoderna kan tilltala elevernas intuition, till exempel när man diskuterar uppgift 2469. Däremot behöver man vara medveten om att de bara fungerar när nämnaren är ett heltal.

### Division av bråk

#### Division av bråk

Att utföra divisionen

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{6}$$



är detsamma som att bestämma hur många sjätte-delar det finns i en halv. Med hjälp av en figur går det ganska lätt att se att det finns 3 sjätte-delar i en halv.

Vi får samma resultat om vi utför multiplikationen

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{1} = \frac{1 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 3$$

Att dividera  $\frac{1}{2}$  med  $\frac{1}{6}$  ger alltså samma resultat som att multiplicera  $\frac{1}{2}$  med talet  $\frac{6}{1}$ .

#### Inverterat bråk

Bråket  $\frac{6}{1}$  kallas för det *inverterade* bråket till  $\frac{1}{6}$ .

I det inverterade bråket har täljare och nämnare bytt plats.

#### Varför fungerar metoden?

Vi förklarar varför metoderna ger samma resultat: Om vi förlänger med det inverterade bråket till nämnaren, så får vi en division med 1

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{1} = \frac{1 \cdot 6}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$$

Resultatet blir

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 3$$

#### Räkneregel

Vi får följande regel för division av två bråk:

#### Räkneregel för division av bråk

Att dividera med ett bråk är detsamma som att multiplicera med det inverterade bråket.

$$\frac{1}{3} \div \frac{2}{9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{9}{2} \text{ är det inverterade bråket till } \frac{2}{9}$$

## Språkbruk

Vid division av två bråk får begreppet "nämnare" dubbel betydelse. Dels refererar nämnaren till det uttryck som står under bråkstrecket, dels till eventuella nämnare i vart och ett av de bråkuttrycken. Det kan vara värt att påpeka denna dubbla betydelse av begreppet.

## Kommentarer till uppgifterna

Uppmärksamma särskilt elevernas svar på uppgift 2469. En del elever kan vara frestade att förkorta med 2 i b)-uppgiften eller att skriva svaret i d)-uppgiften som  $\frac{3,5}{8}$ . Tydliggör då att ett bråk är en kvot mellan heltal.

#### Exempel:

a)  $\frac{1}{9} \div \frac{2}{5}$     b)  $\frac{6}{7} \div 4$     c)  $6 \div \frac{3}{4}$

**Lösning:** a)  $\frac{1}{9} \div \frac{2}{5} = \frac{1}{9} \cdot \frac{5}{2} = \frac{1 \cdot 5}{9 \cdot 2} = \frac{5}{18}$     Det inverterade bråket till  $\frac{2}{5}$  är  $\frac{5}{2}$

b)  $\frac{6}{7} \div 4 = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6 \cdot 1}{7 \cdot 4} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$     Det inverterade bråket till 4 är  $\frac{1}{4}$

c)  $6 \div \frac{3}{4} = 6 \cdot \frac{4}{3} = \frac{6 \cdot 4}{3} = \frac{24}{3} = 8$     Det inverterade bråket till  $\frac{3}{4}$  är  $\frac{4}{3}$

#### Starter

a) Vilka av uttrycken kan du använda för att beräkna hälften av en sjundedel?

$$\frac{1}{7} \div 2 \quad \frac{1}{7} \div \frac{1}{2} \quad \frac{7}{2} \div \frac{1}{7} \quad \frac{1}{2} \div \frac{1}{7}$$

b) Utför beräkningarna.

Lös uppgifterna utan räknare.

#### NIVÅ 1

2469 Vilket bråk är hälften av

a)  $\frac{2}{3}$     b)  $\frac{4}{10}$

c) 5    d)  $\frac{7}{8}$

2470 a) Hur många sjundedelar går det på 2 hela?

b) Visa att du får samma svar när du utför divisionen  $2 \div \frac{1}{7}$

2471 Ett stort glas rymmer  $\frac{1}{3}$  liter läsk.

a) Vilket av uttrycken visar hur många sådana glas man kan fylla om man har 4 liter läsk?

$$4 \cdot \frac{1}{3} \quad 4 \cdot \frac{2}{3} \quad 4 - \frac{1}{3} \quad 4 \div \frac{1}{3}$$

b) Utför beräkningarna.



2472 Beräkna och svara i enklaste form

a)  $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$     b)  $\frac{12}{5} \div \frac{10}{3}$     c)  $\frac{2}{9} \div \frac{1}{3}$

2473 Beräkna och svara i enklaste form

a)  $7 \div \frac{1}{7}$     b)  $1 \div \frac{2}{3}$     c)  $12 \div \frac{5}{3}$

## Exempel

Martin har satt morötter på  $\frac{1}{3}$  av trädgårdslandet. Resten av landet delas i fyra lika delar. På en av dessa sätter han persilja. På hur stor andel av landet odlar han persilja?

## Lösning/Kommentar

Den del som blir kvar när Martin har sått morötter är  $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Persilja odlas på en fjärdedel av det som är kvar. Alltså

$$\frac{2}{3} \div 4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Man kan också lösa problemet med hjälp av en figur.



**Svar:** Persilja odlas på  $\frac{1}{6}$  av landet.

Några elever ställer kanske direkt upp produkten  $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$ . Det ger ett bra tillfälle att lyfta fram att division med 4 ger samma resultat som multiplikation med  $\frac{1}{4}$ .

## Exempel

Ett bråk med täljaren 12 och nämnaren 5 divideras med ett annat bråk, där täljaren är 3 och nämnaren är 7. Beräkna kvoten.

## Lösning/Kommentar

$$\frac{12}{5} \text{ ska divideras med } \frac{3}{7}$$

Vi förlänger med det inverterade värdet till  $\frac{7}{3}$  och förkortar sedan.

$$\frac{12}{5} \div \frac{3}{7} = \frac{12}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{12 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{12}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{84}{15} = \frac{28}{5} \quad \text{Eller } 5 \frac{3}{5}$$

För att få enklare beräkningar kan man förkorta innan man multiplicerar ihop täljare och nämnare. Vi får då direkt:

$$\frac{12}{5} \div \frac{3}{7} = \frac{12}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 1} \cdot \frac{7}{3} = \frac{28}{5}$$

**Svar:** a)  $\frac{1}{3} \div \frac{1}{6}$  och  $\frac{2}{5} \div \frac{1}{5}$

b)  $\frac{1}{12} \div 6 = \frac{1}{72}$ ,  $1 \div \frac{1}{4} = 4$ ,  $\frac{1}{8} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{6}{2} \div 3 = 1$

### Tips

I regelrutan på sidan 60 i elevboken skriver vi: Att *dividera* med ett bråk är samma sak som att *multiplicera* med det inverterade bråket. I teorigenomgången på samma sida härleder vi denna metod genom att förlänga med nämnarens inverterade värde så att talet vi dividerar med blir 1.

Det kan vara en god idé att låta eleverna utföra några bråkdivisioner genom att förlänga bråket så att nämnaren blir 1. Då kan de själva upptäcka att de direkt kan multiplicera med det inverterade talet. Även om de inte själva upptäcker den genvägen, brukar den övningen göra dem bättre rustade att förstå varför metoden fungerar.

### Kommentarer till uppgifterna

I uppgift **2476** vill vi uppmärksamma skillnaden mellan att förkorta och dividera med 5.

Den sista uppgiften på Nivå 3, **2482**, är en utmanande uppgift som man kan lösa på många sätt. I lösningarna i slutet av Lärarguiden ger vi ett par alternativ.

### Exituppgift

Beräkna

1  $\frac{2}{8} / 2$

A  $\frac{1}{4}$       B  $\frac{1}{8}$       C  $\frac{2}{4}$

2  $\frac{1}{3} / 2$

A  $\frac{1}{6}$       B  $\frac{2}{6}$       C  $\frac{2}{3}$

3  $\frac{1}{2} / \frac{1}{8}$

A  $\frac{1}{4}$       B 2      C 4

Svar: B, A, C

### FÖRDLUPNING

2474 Beräkna och svara i enklaste form  
a)  $\frac{9}{10} / 3$     b)  $\frac{5}{7} / 2$     c)  $\frac{1}{8} / 6$

2475 Diana tänker bjuda på pizza. Hon räknar med att varje gäst kommer att äta  $\frac{2}{3}$  av en pizza och beställer därför 12 pizzor. Hur många gäster har hon bjudit?

2476 Förklara skillnaden mellan att dividera ett bråk med 5 och att förkorta ett bråk med 5.

### F NIVÅ 2

2477 Para ihop de uttryck som ger samma resultat.

$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}$	$\frac{2}{3} / \frac{1}{4}$
$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}$	$\frac{2}{3} / \frac{4}{3}$
$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} / \frac{1}{3}$
$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} / \frac{2}{3}$

2478 Beräkna  
a)  $\frac{4}{5} / \frac{2}{5} - \frac{2}{7} / \frac{1}{7}$

b)  $\frac{2}{9} / \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3}$

c)  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$   
 $\frac{1}{6}$

2479 En behållare som innehåller  $\frac{2}{5}$  ton djurfoder ska delas upp i mindre lådor som rymmer  $\frac{1}{10}$  ton. Hur många mindre lådor behöver man?

### NIVÅ 3

2480 Om du vet att  $\frac{a}{b} / \frac{1}{3} = \frac{12}{13}$ , vad är då  $\frac{a}{b} / \frac{2}{3}$ ?

2481 Om du vet att  $\frac{a}{b} / \frac{4}{5} = \frac{5}{38}$ , vad är då  $\frac{a}{b} / \frac{2}{5}$ ?

2482 Hefi målar en vägg på 4 timmar. För Sixten tar det 6 timmar att måla samma vägg. Hur lång tid tar det för dem att måla väggen om de målar samtidigt?

### Resonemang och begrepp

#### Sant eller falskt

Avgör om påståendena är sanna eller falska.

- $\frac{5}{9}$  är större än  $\frac{4}{9}$
- $\frac{1}{5}$  är större än  $\frac{1}{4}$
- När man beräknar  $\frac{2}{7} - \frac{1}{5}$  får man  $\frac{1}{2}$
- Halften av  $\frac{4}{8}$  är  $\frac{2}{4}$
- När man beräknar  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$  får man  $\frac{1}{6}$

#### Fundera och förklara

- Visa med ett exempel hur man skriver om ett tal i bråkform till blandad form.
- Visa med ett exempel hur man skriver om ett tal i blandad form till bråkform.
- Vad måste man tänka på när man adderar två bråk med olika nämnare?
- Blir ett tal i bråkform större när man förlänger det?

### Svar till Resonemang och begrepp

#### Sant eller falskt

- Sant, eftersom 5 delar är flera än 4 delar.
- Falskt. Ju fler delar man delar upp helheten i desto mindre blir delarna.
- Falskt,  $\frac{2}{7} - \frac{1}{5} = \frac{10}{35} - \frac{7}{35} = \frac{3}{35}$
- Falskt,  $\frac{4}{8} / 2 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$
- Sant,  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$

#### Fundera och förklara

- T.ex.  $\frac{23}{3} = 7 \frac{2}{3}$
- T.ex.  $4 \frac{5}{6} = \frac{29}{6}$
- Man måste först skriva om bråken så att de får samma nämnare.
- Nej, talets storlek förändras inte. Det är bara skrivet på ett annat sätt.