

Geometrisk serie

När man adderar elementen i en geometrisk talföljd, så får man en geometrisk summa. En geometrisk summa med oändligt många termer kallas för en *geometrisk serie*. I den här aktiviteten får du möjligheten att fördjupa dina kunskaper om geometriska summor och serier.

- 1 Beräkna värdet av den geometriska summan $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots + \frac{1}{3^n}$ om antalet termer är
 - a) 5
 - b) 10
 - c) 15
 - d) Vad händer med summan när termerna blir fler?
- 2 En del geometriska serier kan ha ändliga gränsvärden. Låt s_n vara summan av de n första termerna i serien

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$$
 Bestäm gränsvärdet $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.
- 3 Låt s_n vara summan av de n första termerna i en geometrisk serie. Undersök om gränsvärdet $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ existerar om serien ges av
 - a) $1 + 1 \cdot 1,02 + 1 \cdot 1,02^2 + 1 \cdot 1,02^3 + \dots$
 - b) $243 + 81 + 27 + 9 + 3 + \dots$
 - c) $500 - 500 \cdot 0,97 + 500 \cdot 0,97^2 - 500 \cdot 0,97^3 + \dots$
- 4 Låt s_n vara summan av en geometrisk talföljd med n termer.

$$s_n = a_1 + a_1 \cdot k + a_1 \cdot k^2 + a_1 \cdot k^3 + \dots$$
 För vilka värden på kvoten k existerar gränsvärdet $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$?
- 5 Låt s_n vara summan av de n första termerna i en geometrisk serie. Visa att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a_1}{1 - k}$$
 i de fall där gränsvärdet existerar.
- 6 Bestäm summan som ges av den geometriska serien
 - a) $\sum_{m=1}^{\infty} 4 \cdot 0,6^{m-1}$
 - b) $\sum_{m=1}^{\infty} 1,4 \cdot \left(-\frac{7}{9}\right)^{m-1}$
- 7 Ge exempel på en geometrisk serie som ger summan $5\frac{2}{3}$.
Beskriv serien med hjälp av summatecknet Σ .

Geometrisk serie

SIDA 1 AV 2

Syfte

Aktiviteten syftar dels till att fördjupa elevernas kunskaper om geometriska summor, dels till att aktualisera deras kunskaper om gränsvärden. Eleverna har tidigare beräknat geometriska summor med oändligt antal termer i läroboken, men i dessa uppgifter har inte begreppet geometrisk serie använts. I den här aktiviteten formaliserar vi de beräkningarna och introducerar begreppet geometrisk serie.

Materiel

Aktivitetsblad *Geometrisk serie*.

Genomförande

Aktiviteten kan med fördel introduceras genom att ge ett konkret exempel på en geometrisk serie. Det kan t.ex. handla om att försöka beräkna hur stor del av en hel chokladkaka man får i sig om man först äter halva, sedan hälften av det som är kvar, sedan hälften av det som är kvar igen osv. Blir hela chokladkakan uppäten? Dela sedan ut aktivitetsbladet Geometrisk serie till eleverna och låt dem arbeta med det enskilt eller i par. Uppmana gärna eleverna att återkoppla till dig för att få en uppfattning om de har förstått hur man beräknar gränsvärdet i uppgift 2. Ett alternativ är att, efter en stund, samla klassen för en gemensam genomgång av uppgift 2.

Lösningar

- 1 a) $\frac{121}{81} \approx 1,49383$ b) 1,49997
c) 1,4999998955
d) Summan verkar närma sig 1,5.

2 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1,5$

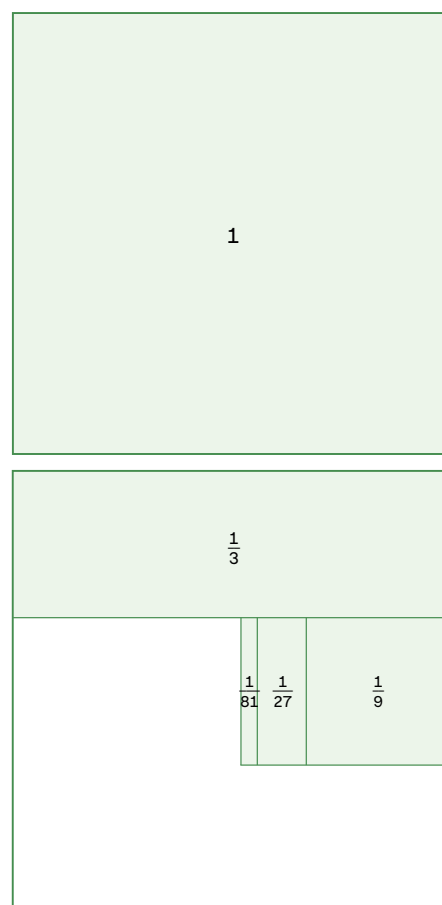
Kommentar:

$$s_n = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{-\frac{2}{3}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{3\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{2} \rightarrow \frac{3}{2} =$$

$$= 1,5 \text{ då } n \rightarrow \infty.$$

Att s_n har gränsvärdet 1,5 kan också åskådliggöras med figuren nedan som föreställer två kvadrater, där man tänker sig att mönstret fortsätter på samma sätt:



Geometrisk serie

SIDA 2 AV 2

- 3 a) Nej, gränsvärdet existerar inte.

Kommentar: Varje term i summan är större än eller lika med 1. En summa av oändligt många termer som är större än 1, blir oändligt stor.

- b) Ja, gränsvärdet existerar och är lika med 364,5.
c) Ja, gränsvärdet existerar och är ca 253,8.

- 4 $-1 < k < 1$

$$5 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(k^n - 1)}{k - 1} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(1 - k^n)}{1 - k} =$$

Om $-1 < k < 1$, så gäller att $k^n \rightarrow 0$ när $n \rightarrow \infty$

$$= \frac{a_1 \cdot 1}{1 - k} = \frac{a_1}{1 - k}$$

- 6 a) 10
b) 0,7875

7 T.ex. $\sum_{m=1}^{\infty} 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{m-1}$

Att lyfta fram

Innan eleverna börjar arbeta med aktiviteten kan det vara bra att lyfta fram skillnaden mellan geometriska summor och geometriska serier. I den kontexten kan man ta upp ett klassiskt exempel från Zenons paradoxer, som t.ex. fallet med tudelningen av en sträcka, där man först förflyttar sig till mitten av sträckan, sedan till mitten av den kvarstående sträckan, sedan till mitten av nästa kvarstående sträcka, osv. i all oändlighet. Frågan är naturligtvis om man någonsin kommer fram till slutet av sträckan. I uppgift 4 får eleverna komma fram till att det bara är för $|k| < 1$ som den geometriska serien har ett gränsvärde. Med andra ord, om termerna i en oändlig summa minskar exponentiellt, så kommer serien att ha ett ändligt gränsvärde. I slutet av lektionen kan man sammanfatta aktiviteten genom att diskutera om det finns någon verklig situation som kan beskrivas med den geometriska summan i uppgift 1, 2 och 4. Låt även i det här fallet eleverna komma med exempel som t.ex. handlar om att successivt förflytta sig längs sträckor som minskar enligt en given regel eller om en mängd som successivt minskar enligt en given regel.

Kryptering med kongruenser

SIDA 1 AV 2

Caesarkrypto

Människor har i alla tider haft behov av att skicka hemliga meddelanden. Ett sätt att göra det är att använda ett så kallat *Caesarkrypto*. Varje bokstav i meddelandet krypteras då genom att den förskjuts ett visst antal steg i alfabetet. Väljer vi exempelvis förskjutningen fem steg, så krypteras bokstaven A som F och bokstaven Y som A.

Bokstav	Tal	Bokstav	Tal	Bokstav	Tal	Bokstav	Tal	Bokstav	Tal
A	0	G	6	M	12	S	18	Y	24
B	1	H	7	N	13	T	19	Z	25
C	2	I	8	O	14	U	20	Å	26
D	3	J	9	P	15	V	21	Ä	27
E	4	K	10	Q	16	W	22	Ö	28
F	5	L	11	R	17	X	23		

När alfabetet tar slut, börjar man om från A igen. Det förklarar varför bokstaven Y krypteras som A.

Om vi numrerar bokstäverna i alfabetet från 0 till 28, kan ett Caesarkrypto med förskjutningen 5 beskrivas med funktionen

$$k \equiv m + 5 \pmod{29}$$

där m står för numret för bokstaven i meddelandet och k står för numret för motsvarande bokstav i kryptot.

Eftersom bokstaven A har numret 0, ska den enligt ekvationen krypteras som $0 + 5 \pmod{29} = 5 \pmod{29}$

vilket är numret för bokstaven F.

Strömchiffer

Ett Caesarkrypto, eller Caesarchiffer som det också kallas, är dock ganska enkelt att dekryptera. Ett mer avancerat krypto får man om man i stället använder ett så kallat *Strömchiffer* som krypterar enligt funktionen

$$k \equiv am + b \pmod{29}$$

där a och b är heltal mellan 0 och 28.

Ett krav för att Strömchiffret ska fungera är dock att funktionen är inverterbar, dvs. att man kan lösa ut m ur formeln. Vi visar hur kryptering och dekryptering kan gå till med två exempel.

Exempel 1: Kryptera ordet NATUR med kryptot $k \equiv 3m + 7 \pmod{29}$.

Lösning: Det är lämpligt att göra en tabell, där du för in ordet i meddelandet.

Bestäm sedan m och k för en bokstav i taget.

Klartext	N	A	T	U	R
m	13	0	19	20	17
k	17	7	6	9	0
Krypto	R	H	G	J	A

$$k \equiv 3m + 7 \equiv 3 \cdot 17 + 7 = 58 \equiv 0 \pmod{29}$$

Ordet NATUR krypteras alltså till RHGJA.

Kryptering med kongruenser

SIDA 2 AV 2

Exempel 2: Ett ord med fem bokstäver har krypterats till UACZU med kryptot $k \equiv 3m + 7 \pmod{29}$. Vilket är ordet?

Lösning: Vi löser ut m ur sambandet $k \equiv 3m + 7 \pmod{29}$:

$$k \equiv 3m + 7 \pmod{29} \quad \text{Addera 22 till båda led}$$

$$k + 22 \equiv 3m + 29 \quad 29 \text{ är kongruent med } 0 \pmod{29}$$

$$k + 22 \equiv 3m \quad \text{Multipluera båda led med } 10$$

$$10(k + 22) \equiv 30m \quad 30 \text{ är kongruent med } 1 \pmod{29}$$

$$10k + 220 \equiv m \quad 220 \text{ är kongruent med } 17 \pmod{29}$$

$$m \equiv 10k + 17$$

Kommentar:

Vi kan inte subtrahera båda leden med 7 och sedan dividera med 3, eftersom $m \equiv \frac{k-7}{3} \pmod{29}$ inte ger heltalsvärden på m från 0 till 28 för alla värden på k från 0 till 28.

Vi gör en ny tabell med kryptotexten överst och bestämmer sedan k och m .

Krypto	U	A	C	Z	U
k	20	0	2	25	20
m	14	17	8	6	14
Klartext	O	R	I	G	O

$$m \equiv 10k + 17 = 10 \cdot 20 + 17 = 217 \equiv 14 \pmod{29}$$

UACZU blir alltså ORIGO i klartext.

- 1 Kryptera ordet MATTE med kryptot $k \equiv 5m + 12 \pmod{29}$.
- 2 Kryptera ordet LÄRARE med kryptot $k \equiv 8m + 3 \pmod{29}$.
- 3 a) Lös ut m ur kryptot $k \equiv 2m + 9 \pmod{29}$.
b) Dekryptera ordet ZGWROQ som har krypterats med kryptot $k \equiv 2m + 9 \pmod{29}$.
- 4 a) Lös ut m ur kryptot $k \equiv 6m + 4 \pmod{29}$.
b) Dekryptera ordet RÖSMXLC som har krypterats med kryptot $k \equiv 6m + 4 \pmod{29}$.
- 5 a) Bestäm ett eget hemligt ord, tre till sex bokstäver långt.
b) Bestäm en egen krypteringsnyckel i formen $k \equiv am + b \pmod{29}$, där a och b är heltal mellan 0 och 28.
c) Kryptera nu ditt hemliga ord med krypteringsnyckeln du bestämde i deluppgift b).
d) Para ihop dig med en kamrat (som kan bevara en hemlighet).
e) Byt nu krypterat ord och tillhörande krypteringsnyckel med varandra och försök dekryptera era ord.
f) Jämför era svar. Fick ni fram rätt ord? Om inte, vad gick fel?

Kryptering med kongruenser

SIDA 1 AV 2

Syfte

I den här aktiviteten får eleverna kryptera och dekryptera meddelanden med hjälp av sina kunskaper om kongruensräkning. Det stärker inte bara elevernas kunskaper i kongruensräkning utan ger dem också tillfälle att pröva på kryptering, en viktig tillämpning av matematik både i dag och genom historien.

Materiel

Aktivitetsblad *Kryptering med kongruenser*.

Genomförande

Aktiviteten kan med fördel introduceras genom att ge ett konkret exempel på en enkel Caesar-kryptering, t.ex. att du som lärare krypterar ditt eget namn genom att förskjuta alla bokstäver ett visst antal steg. Dela sedan ut aktivitetsbladet *Kryptering med kongruenser* till eleverna och låt dem arbeta med det enskilt eller i par. Uppmana gärna eleverna att återkoppla till dig för att få en uppfattning om de har förstått hur man löser uppgift 1 och 2 innan de går vidare. Ett alternativ är att, efter en stund, samla klassen för en gemensam genomgång av uppgift 1 och 2.

Lösningar

1 OMUUD

2 EQXDXG

3 a) $m \equiv 15k + 10$
b) INVERS

4 a) $m \equiv 5k + 9$
b) HEMLIGT

Utvidgning och variation

Deluppgift 5, där eleverna bestämmer ett eget hemligt ord och en egen krypteringsnyckel, kan naturligtvis upprepas flera gånger för de elever som önskar. Det hemliga ordet kan också utökas till en hel mening.

Att lyfta fram

Betona gärna att kryptering spelar, och har spelat, en viktig roll i samhället. Under andra världskriget var dekryptering av tyskarnas hemliga meddelanden en viktig faktor i de allierades vinst, och i dag möjliggör kryptering till exempel att vi kan handla säkert på nätet. I stället för kryptera och dekryptera kan begreppen koda och avkoda användas.

Kongruensräkningen som förekommer i Caesar-kryptering kan vara lite tidskrävande. För att underlätta beräkningarna kan eleven använda en så kallad Cayleytabell för $\mathbf{N}_{28}$, som ger det inverterade talet (mod 29) till alla tal som tillhör $\mathbf{N}_{28} = \{0, 1, 2, \dots, 28\}$. Tabellen läses genom att följa raden för ett givet tal n tills du kommer till talet 1, och talet p i den kolumnen är då det inverterade talet (mod 29) till n , dvs.

$n \cdot p \equiv 1 \pmod{29}$. Ska du t.ex. lösa ut k ur kryptot $k = 7m + 12 \pmod{29}$, adderar du båda leden med 17 och multiplicerar båda leden med 25, eftersom $7 \cdot 25 \equiv 1 \pmod{29}$ enligt Cayleytabellen. Alfabetstabellen och Cayleytabellen kan vara bra hjälpmedel för eleverna, speciellt för uppgift 5. De finns med som separat kopieringsunderlag.

Kryptering med kongruenser

SIDA 2 AV 2

Alfabetstabell

Bokstav	Tal	Bokstav	Tal	Bokstav	Tal	Bokstav	Tal	Bokstav	Tal
A	0	G	6	M	12	S	18	Y	24
B	1	H	7	N	13	T	19	Z	25
C	2	I	8	O	14	U	20	Å	26
D	3	J	9	P	15	V	21	Ä	27
E	4	K	10	Q	16	W	22	Ö	28
F	5	L	11	R	17	X	23		

Cayleytabell 0–28

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	2	5	8	11	14	17	20	23	26
4	4	8	12	16	20	24	28	3	7	11	15	19	23	27	2	6	10	14	18	22	26	1	5	9	13	17	21	25
5	5	10	15	20	25	1	6	11	16	21	26	2	7	12	17	22	27	3	8	13	18	23	28	4	9	14	19	24
6	6	12	18	24	1	7	13	19	25	2	8	14	20	26	3	9	15	21	27	4	10	16	22	28	5	11	17	23
7	7	14	21	28	6	13	20	27	5	12	19	26	4	11	18	25	3	10	17	24	2	9	16	23	1	8	15	22
8	8	16	24	3	11	19	27	6	14	22	1	9	17	25	4	12	20	28	7	15	23	2	10	18	26	5	13	21
9	9	18	27	7	16	25	5	14	23	3	11	20	1	10	19	28	8	17	26	6	15	24	4	13	22	2	11	20
10	10	20	1	11	21	2	12	22	3	13	23	4	14	24	5	15	25	6	16	26	7	17	27	8	18	28	9	19
11	11	22	4	15	26	8	19	1	11	23	5	16	27	9	20	2	13	24	6	17	28	10	21	3	14	25	7	18
12	12	24	7	19	2	14	26	9	20	4	16	28	11	23	6	18	1	13	25	8	20	3	15	27	10	22	5	17
13	13	26	10	23	7	20	4	17	1	14	27	11	24	8	21	5	18	2	15	28	12	25	9	22	6	19	3	16
14	14	28	13	27	12	26	11	25	10	24	9	23	8	22	7	21	6	20	5	19	4	18	3	17	2	16	1	15
15	15	1	16	2	17	3	18	4	19	5	20	6	21	7	22	8	23	9	24	10	25	11	26	12	27	13	28	14
16	16	3	19	6	22	9	25	12	28	15	2	18	5	21	8	24	11	27	14	1	17	4	20	7	23	10	26	13
17	17	5	22	10	27	15	3	20	8	25	13	1	18	6	23	11	28	16	4	21	9	26	14	2	19	7	24	12
18	18	7	25	14	3	21	10	28	17	6	24	13	2	20	9	27	16	5	23	12	1	19	8	26	15	4	22	11
19	19	9	28	18	8	27	17	7	26	16	6	25	15	5	24	14	4	23	13	3	22	12	2	21	11	1	20	10
20	20	11	2	22	13	4	24	15	6	26	17	8	28	19	10	1	21	12	3	23	14	5	25	16	7	27	18	9
21	21	13	5	26	18	10	2	23	15	7	28	20	12	4	25	17	9	1	22	14	6	27	19	11	3	24	16	8
22	22	15	8	1	23	16	9	2	24	17	10	3	25	18	11	4	26	19	12	5	27	20	13	6	28	21	14	7
23	23	17	11	5	28	22	16	10	4	27	21	15	9	3	26	20	14	8	2	25	19	13	7	1	24	18	12	6
24	24	19	14	9	4	28	23	18	13	8	3	27	22	17	12	7	2	26	21	16	11	6	1	25	20	15	10	5
25	25	21	17	13	9	5	1	26	22	18	14	10	6	2	27	23	19	15	11	7	3	28	24	20	16	12	8	4
26	26	23	20	17	14	11	8	5	2	28	25	22	19	16	13	10	7	4	1	27	24	21	18	15	12	9	6	3
27	27	25	23	21	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1	28	26	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2
28	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1