

3 Differential-ekvationer

- 3101** a) $VL = y' + y = 1 + x - 1 = x$,
HL = x , VL = HL v.s.v.
b) $VL = y' + 3y = e^x + 3e^x = 4e^x$,
HL = $4e^x$, VL = HL v.s.v.
c) $VL = y' - 2y = 2e^{2x} - 2e^{2x} = 0$,
HL = 0, VL = HL v.s.v.
- 3102** a) $VL = y' + y = 6x - 6 + 3x^2 - 6x = 3x^2 - 6$,
HL = $3x^2 - 6$, VL = HL v.s.v.
b) $VL = y' - 3y = 3e^{3x} - 3e^{3x} - 12 = -12$,
HL = -12 , VL = HL v.s.v.
c) $VL = y' + 5y = -5e^{-5x} + 5e^{-5x} = 0$, HL = 0,
VL = HL v.s.v.
- 3103** a) $VL = y'' + 4y = -4 \sin 2x - 4 \cos 2x + 4(\sin 2x + \cos 2x) = 0$,
HL = 0, VL = HL v.s.v.
b) $VL = y'' + y' - 2y = 4e^{-2x} - 2e^{-2x} - 2e^{-2x} = 0$,
HL = 0, VL = HL v.s.v.
c) $VL = y'' + \frac{1}{2}y' = \frac{1}{4}e^{-1/2x} - \frac{1}{4}e^{-1/2x} = 0$,
HL = 0, VL = HL v.s.v.
- 3104** a) $VL = y'' - y' + y = 2 - (2x + 2) + x^2 + 2x = x^2$,
HL = x^2 , VL = HL v.s.v.
b) $VL = y'' + y' + y = 6x - 6 + 3x^2 - 6x + x^3 - 3x^2 = x^3 - 6$,
HL = $x^3 - 6$, VL = HL v.s.v.
c) $VL = y'' + y' - 2y = 12e^{-2x} - 6e^{-2x} - 6e^{-2x} = 0$,
HL = 0, VL = HL v.s.v.
- 3105** a) $VL = y'' + y = -\sin x + x + \sin x = x$,
HL = x , VL = HL v.s.v.
b) $VL = y'' - 2y' + 2y = 2e^x + xe^x - 2(e^x + xe^x) + 2xe^x = xe^x$,
HL = xe^x , VL = HL v.s.v.
c) $VL = y'' + y = 10 \cos x - 5x \sin x + 5x \sin x = 10 \cos x$,
HL = $10 \cos x$, VL = HL v.s.v.

- 3106** Lösningen deriveras och sätts tillsammans med derivatorna in i differentialekvationen. Sedan kontrollerar man att VL = HL.
- 3107** Lösningar till vanliga algebraiska ekvationer är värden på okända variabler, medan lösningar till differentialekvationer är en sökt funktion.
- 3108** a) $B'(t) = 0,0035 \cdot B(t)$
b) Bakteriedodningens tillväxthastighet är 0,35 % per sekund av aktuell bakteriemängd.
c) Nej, för $B(0) = 0$ betyder att det inte finns några bakterier, vid $t = 0$.
- 3109** a) $m' = k \cdot m$
b) Negativ (om ekvationen skrivs som ovan)
- 3110** Sönderfallshastigheten är 1 % per år av aktuellt antal atomer.
- 3111** $a = -\frac{1}{CR}$
- 3112** $VL = y' - ay = aCe^{ax} - aCe^{ax} = 0$, HL = 0,
VL = HL v.s.v.
- 3113** $VL = -A^2 \sin Ax - A^2 \cos Ax + A^2(\sin Ax + \cos Ax) = 0$,
HL = 0, VL = HL v.s.v.
- 3114** $A = 3$ och B kan vara vilken konstant som helst.
- 3115** T.ex: Verifiera att $y' + y = 0$ har lösningen $y = 2e^{-x}$.
- 3116** T.ex: $A = -2$ och $b = 2$. (A kan vara vilket tal som helst men b kan bara vara 2 eller -2).
- 3117** $\omega = \pm\sqrt{k}$
- 3118** $y' = -k(y - r)$ då $0 \leq r \leq y$ och där y är teets temperatur och r rummets.
- 3119** $k = \frac{1}{2}$
- 3120** a) $y = x^2 - x + C$
b) $y = x^3 + e^x + C$
c) $y = -\frac{e^{-5x}}{5} + C$
d) $y = \frac{e^{4x}}{2} + 3x + C$

- 3121** a) $y = 2 \ln x + C$
b) $y = \frac{\sin 2x}{2} + C$
c) $y = -\frac{3 \cos 4x}{4} + C$
- 3122** a) $y = \frac{x^3}{3} + Cx + D$
b) $y = e^{-3x} + Cx + D$
c) $y = -\frac{\cos 2x}{4} + Cx + D$
- 3123** a) $y = x^2 + x + 3$
b) $y = 2x^3 + 5$
c) $y = \ln x + 2$
- 3124** 25 m
- 3125** a) $y = \frac{1}{x} + C$
b) $y = C$
- 3126** a) $y = \frac{5x^3}{3} - 13$
b) $y = \frac{x^3}{2} + \frac{7x}{2} - \frac{3}{2}$
c) $y = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + x + 3$
- 3127** a) $y = -4 \sin \frac{x}{2} + Cx + D$
b) $y = \sqrt{x} + C$
- 3128** a) $y' = x^2 - 6x + 5$
b) $y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + C$
- 3129** a) 2
b) -4
c) 5
- 3130** a) 5
b) -3
c) $\frac{3}{2}$
- 3131** a) 4
b) $\frac{1}{2}$
c) -1
- 3132**
- 3133** a - B, b - C, c - A
- 3134** A eftersom $y' = x - y$ blir $y' = 3 - 1 = 2$.
- 3135** Lutningen är punktens y -värde multiplicerat med 2 och subtraherat med 3 gånger sitt x -värde.

3136 T.ex: Vilken lutning har en lösningskurva till $y' = x - 2$ i punkten $(1, -2)$.

3137 A: 1, B: $\frac{1}{2}$, C: $\frac{1}{4}$

3138 a) (1, 2)
b) (2, 4)
c) 4

3139 8

3140 4

3141 3,75

3142 a) 2
b) 1,98

3143 0,02

3201 a) $y = Ce^{3x}$
b) $y = Ce^{-2x}$
c) $y = Ce^{7x}$

3202 a) $y = Ce^x$
b) $y = Ce^{-3x}$
c) $y = Ce^{0,4x}$

3203 a) $y = 3e^{5x}$
b) $y = 2e^{5x}$
c) $y = e^{5x+15}$

3204 a) $y = -5e^{-3x}$
b) $y = e^{8-3x}$
c) $y = e^{4-3x}$

3205 a) $N' = 0,05N$
b) $N = Ce^{0,05t}$
c) $N = 1\,500e^{0,05t}$
d) 2 100 st

3206 a) $N' = -0,02N$
b) 38 000 st

3207 a) $y = 3e^{2x}$
b) $y = 5e^{(\ln 2/5)x} = 5\left(\frac{2}{5}\right)^x$
c) $y = \frac{4}{3} \cdot e^{(\ln 3/2)x} = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x$

3208 $f(x) = 5e^{x/3}$

3209 $y' + 3y = 0$

3210 a) $y = Ce^{-1,21 \cdot 10^{-4}t}$
b) $4,2 \cdot 10^{16}$ st
c) 5 730 år

3211 $y = 5e^{-2x}$

3212 36 °C

3213 a) $VL = y' + 4y =$
 $= 4 + 4(4x - 1) = 16x,$
 $HL = 16x, VL = HL$ v.s.v.

b) $VL = y' - 2y =$
 $= 2x + 1 - 2(x^2 + x) =$
 $= 1 - 2x^2, HL = 1 - 2x^2,$
 $VL = HL$ v.s.v.

3214 $A - y_4, B - y_1, C - y_3$

3215 a) $y_h = Ce^{9x}$
b) $y_p = -\frac{2x}{3} - \frac{2}{27}$
c) $y = Ce^{9x} - \frac{2x}{3} - \frac{2}{27}$

3216 a) $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{2}$
b) $y = Ce^{3x} - 2$
c) $y = Ce^{-5x} + 2$

3217 a) $y = Ce^{-x} + 2x - 2$
b) $y = Ce^{3x} - 3x - 1$
c) $y = Ce^{-3x} - 6x + 2$

3218 a) $y = Ce^{-x} + x^2 - 2x + 2$
b) $y = Ce^{3x} + x^2 + \frac{2x}{3} + \frac{2}{9}$
c) $y = Ce^{6x} + 3x^2 + x + \frac{1}{6}$

3219 $y = \frac{11}{3}e^{3x} + x + \frac{1}{3}$

3220 a) $y = Ce^{-x} + 3x - 2$
b) $y = Ce^{3x} - \frac{x}{3} - \frac{22}{9}$
c) $y = Ce^{2x} + 2x^2 - 3x + 2$

3221 Elisabeth har rätt; man kan inte utelägna x -termen.

3222 $y = 11e^{-x} + 3x - 4$

3223 $y = -3x^2 - 3x + 1$

3224 $y_p = 0,16 \sin x + 0,12 \cos x$

3225 Nej, lösningen till motsvarande homogena ekvation ger $k = 1$ och $y' + y = x^2$ kan inte ha partikulärlösningen $x^2 + 1$.

3226 a) 70 °C
b) Ja, den håller varmt ganska länge.

3227 a) $M = 175e^{0,03t}$
b) Ca 200 st (203)

3228 a) $N' = 0,05N; N(0) = 3\,000$
b) $N = 3\,000e^{0,05t}$

3229 a) $N' = k \cdot N$
b) Ca 9 st

3230 a) 20 m/s
b) 20 m

3231 a) $N' = k \cdot N$
b) $N = 20e^{0,11t}$

3232 a) $y = Ce^{kx}$
b) $k \approx -0,13$

3233 a) $y' = 0$
b) $y' = k\sqrt{y}$

3234 a) $y = 14e^{0,097t}$
b) 3,7 h

3235 a) $N' = -k \cdot N$
b) $N = 6,5 \cdot 10^{10} \cdot e^{-1,2 \cdot 10^{-4}t}$
c) Ca 7 000 år (6 903)

3236 a) $y = Ce^{-0,023t}$
b) 30 år
c) 130 år

3237 a) $k \approx -0,066 \text{ min}^{-1}$
b) 28 min

3238 $v' = 9,82 - 0,02v$

3239 a) $y' = 0,003y$
b) 490 kg
c) $y' = 0,003y - a$
d) 0,6 kg/min

3240 a) $q = Qe^{-t/RC}$
b) 3,5 μs

3241 a) $\frac{dv}{dt} = 9,82 - \frac{14}{78}v^2$
b) Eulers stegmetod med $h = 0,1$ ger 7,6 m/s.

3301 a) $r^2 + 3r + 2 = 0$
b) $r^2 - 2r - 3 = 0$
c) $2r^2 - 10r + 8 = 0$

3302 a) en dubbelrot
b) två olika reella rötter
c) två olika icke-reella rötter

3303 $VL = y'' + y' - 6y =$
 $= 4C_1e^{2x} + 9C_2e^{-3x} + 2C_1e^{2x} -$
 $- 3C_2e^{-3x} - 6C_1e^{2x} - 6C_2e^{-3x} = 0,$
 $HL = 0, VL = HL$ v.s.v.

3304 a) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-4x}$
b) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$
c) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$

3305 a) $y = C_1 + C_2e^{-2x}$
b) $y = C_1 + C_2e^{-x}$
c) $y = C_1 + C_2e^{5x}$

- 3306** a) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$
 b) $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{-4x}$
 c) $y = C_1 e^{7x} + C_2 e^{-x}$
- 3307** $y = 3e^{5x} + 2e^{-2x}$
- 3308** a) $y = C_1 + C_2 e^x$
 b) $y = C_1 e^{8x} + C_2 e^{5x}$
- 3309** För $k > 10$ och för $k < -10$ ger $r^2 + kr + 25 = 0$ två reella lösningar.
- 3310** $k = 2$ ger rötterna 3 och -5 till $r^2 + kr - 15 = 0$.
- 3311** $y = -3e^{3x} + e^{-2x}$
- 3312** $y = \frac{7e^{7x} - e^{-5x}}{6}$
- 3313** $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{2x}$
- 3314** $y'' - 3y' - 40y = 0$,
 $y(0) = 2, y'(0) = 3$
- 3315** a) $y = (C_1 x + C_2) e^{-x}$
 b) $y = (C_1 x + C_2) e^{4x}$
 c) $y = (C_1 x + C_2) e^{12x}$
- 3316** a) $y = (C_1 x + C_2) e^{3x}$
 b) $y = (C_1 x + C_2) e^{8x}$
 c) $y = (C_1 x + C_2) e^{5x}$
- 3317** $y = 2xe^{7x}$
- 3318** a) $y = (C_1 x + C_2) e^{-19x}$
 b) $y = (C_1 x + C_2) e^{11x}$
 c) $y = (C_1 x + C_2) e^{-5x}$
- 3319** $y = (-4x + 5) e^{6x}$
- 3320** $y = (50x - 3) e^{-15x}$
- 3321** $k = 22$ ger $r^2 + 22r + 121 = 0$ och $r = 11$
- 3322** $s = (C_1 t + C_2) e^{3t}$
- 3323** $y'' + 6y' + 9y = 0$, där $y(0) = -5$ och $y'(0) = 17$.
- 3324** a) $y = e^{-3x}(A \cos x + B \sin x)$
 b) $y = e^{5x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$
 c) $y = A \cos 5x + B \sin 5x$
- 3325** a) $y = e^x(A \cos x + B \sin x)$
 b) $y = e^{-3x/2} \left(A \cos \frac{x}{2} + B \sin \frac{x}{2} \right)$
 c) $y = e^{5x}(A \cos x + B \sin x)$
- 3326** a) $y = e^{-2x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$
 b) $y = 2e^{-2x} \cdot \sin 2x$
- 3327** a) $y = e^{-7x/2} \left(A \cos \frac{x}{2} + B \sin \frac{x}{2} \right)$
 b) $y = e^{3x}(A \cos x + B \sin x)$
 c) $y = e^{4x}(A \cos x\sqrt{3} + B \sin x\sqrt{3})$

- 3328** $y = e^x(2 \cos 2x + (\sqrt{2} - 2) \sin 2x)$
- 3329** a) $y = A \cos 3x + B \sin 3x$
 b) $y = 2 \sin 3x$
- 3330** För $k > \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 12,25$.
 (Värdet under rottecknet på den karakteristiska ekvationen blir negativt.)
- 3331** Om $y = e^{rx}$ så är $ay'' + by' + cy = e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$ och den karakteristiska ekvationen kan skrivas $ar^2 + br + c = 0$.
- 3332** $y = e^x(4 \cos 3x + 5 \sin 3x)$
- 3333** a) $y \approx A \cos 3,0x + B \sin 3,0x$
 b) $y \approx 0,5 \cos 3,0x + 0,67 \sin 3,0x$
- 3334** a) VL = $y'' + y' - 3y = 5 - 3(5x + 1) = 2 - 15x =$ HL v.s.v.
 b) VL = $y'' - 4y = 2 - 4(x^2 - 3) = 14 - 4x^2 =$ HL v.s.v.
- 3335** a) VL = $y'' - 2y' + y = e^x(Cx + D) + 2Ce^x - 2(2 + e^x(Cx + D) + Ce^x) + 2x - 3 + e^x(Cx + D) = 2x - 7$, HL = $2x - 7$, VL = HL v.s.v.
 b) VL = $y'' + 6y' + 5y = 2 + Ce^{-x} + 25De^{-5x} + 6(2x - Ce^{-x} - 5De^{-5x}) + 5(x^2 + 1 + Ce^{-x} + De^{-5x}) = 5x^2 + 12x + 7 =$ HL v.s.v.
- 3336** $A - y_4, B - y_2, C - y_2, D - y_1$
- 3337** a) $y_p = 4x - 4$
 b) $y_p = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$
 c) $y_p = x^2 - 1$
- 3338** a) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - 2$
 b) $y = (C_1 x + C_2) e^{-2x} + 2x - 2$
- 3339** a) $y = e^{-2x}(A \cos x + B \sin x) + 2$
 b) $y = (C_1 x + C_2) e^{7x} + x + 2$
- 3340** a) $y = C_1 + C_2 e^{4x} - 3x$
 b) $y = e^{-x}(A \cos 2x + B \sin 2x) + 3x + 2$
- 3341** $y = 2,375 - 1,875e^{-4x} + x^2 - \frac{x}{2}$
- 3342** $y = 3,5 \sin x - 0,5 \cos x$
- 3343** Fel, ansatsen måste vara $y_p = ax^2 + bx + c$.
- 3344** $k = 25$
 ($y = 2x + Ce^{-5x} + De^{5x}$ satisfierar ekvationen $y'' - 25y = -50x$)

- 3345** a) $x(t) = A \sin \sqrt{k}t$
 b) $A\sqrt{k}$ m/s
- 3346** $y = A \cos 2t + B \sin 2t - \frac{2}{5} \cos 3t$
- 3347** a) $y_{ii} = (C_1 x + C_2) e^{2x}$
 b) $y = (C_1 x + C_2) e^{2x} + \frac{x}{4} + 2$

Blandade uppgifter

- 1** VL = $y' + 2y = -4e^{-2x} + 2 \cdot 2e^{-2x} =$ HL v.s.v.
- 2** VL = $y'' + y' = -2 \cos x + 2 \cos x - x = -x$, HL = $-x$, VL = HL v.s.v.
- 3** $N'(t) = k \cdot N(t)$
- 4** Mängden radioaktivt ämne minskar med 0,21 % per tidsenhet av aktuell mängd.
- 5** a) $y = \frac{\sin 2x}{2} + \frac{x^2}{2} + C$
 b) $y = \frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2} + Cx + D$
 c) $y = 2 \ln x + C$
- 6** a) $y = 3x^2 - 2x + 3$
 b) $y = -\cos x + 3$
 c) $y = \ln x$
- 7** a) $y = Ce^{-3x}$
 b) $y = Ce^{-x}$
 c) $y = Ce^{3x}$
- 8** a) $y = 2e^{5x}$
 b) $y = e^{-4x}$
 c) $y = e^{-3x}$
- 9** $K' = -0,04K$ och $K(0) = 5\,000$ kr, där K är kapitalet i kronor.
- 10** a) $y = Ce^{-2x} + 2$
 b) $y = Ce^{5x} - 2$
 c) $y = Ce^{3x/2} - \frac{8}{3}$
- 11** a) $y = Ce^{-5x} + \frac{x}{5} - \frac{1}{25}$
 b) $y = Ce^{3x} - \frac{2x}{3} - \frac{5}{9}$
 c) $y = Ce^{-2x} + 2x - 1$
- 12** $y = \frac{3e^{2x}}{2} - x - \frac{1}{2}$
- 13** a) 2
 b) -8
 c) -2

- 14 a) B
b) C
c) A
- 15 a) (1, 0)
b) (2, -1)
c) $y(2) = -1$
- 16 $y(3) = 2,5$
- 17 a) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$
b) $y = C_1 + C_2 e^{2x}$
c) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-5x}$
- 18 a) $y = (C_1 x + C_2) e^x$
b) $y = (C_1 x + C_2) e^{-3x}$
c) $y = e^{-x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$
- 19 a) $y = e^{3x} + 2e^{-x}$
b) $y = \frac{-4e^{4x} - 17e^{-3x}}{7}$
c) $y = 2e^{-8x} + 3e^{-2x}$
- 20 a) $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^x + 2$
b) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + 3x - 2$
c) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x + 2x + 3$
- 21 $i = A \cos 5t + B \sin 5t$
- 22 a) 1 °C
b) 1 °C/min
c) 0,7 °C/min
d) Skillnaden beror på olika avrundning. Per mäter vattnet till 19,5 °C vilket ger 36 minuter. Stina använder temperaturen 19,95 °C vilket ger tiden 59 minuter.
- 23 VL = $y'' - a^2 y = -a^2 C \sin ax - a^2 D \cos ax + a^2(C \sin ax + D \cos ax) = 0 = \text{HL}$ v.s.v.
- 24 a) $y = x^3 + 3x - 2$
b) $y = \frac{x^3}{6} + x + \frac{1}{3}$
c) $y = -\frac{\cos 2x}{4} + \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}$
- 25 T.ex. $y = 3e^{4,5x}$
- 26 $y = Ce^{2x} - 2x^2 - 2x - 1$
- 27 22,8
- 28 a) $K(t) = -3\,900e^{-0,1t} + 4\,500$
b) 1 890 000 €
- 29 a) $N' = k \cdot N$
b) $t = \frac{\ln 2}{k}$ dygn
- 30 $y = e^x(\cos x + \sin x)$

- 31 $y'' - y' - 2y = 0$
- 32 a) $y = -\sin 2t$
b) $t = 1,6$ s
c) 2 cm/s
- 33 a) Varje år förändras mängden föroreningar i sjön genom att 100 kg föroreningar tillförs från fabriken och 10 % av den aktuella mängden föroreningar följer med vattnet ut ur sjön.
b) $y = -500e^{-0,1t} + 1\,000$
c) Massan föroreningar går mot 1 000 kg.
- 34 $y = (C_1 x + C_2) e^{3x}$
- 35 a) $y = e^{-0,5x}(A \cos x + B \sin x)$
b) $y = e^{-0,5x} \cdot 2 \sin x$
- 36 a) $y = -13e^{-0,074t} + 21$
b) 19,6 °C
- 37 a) $y' - 2y = -4x + 2, y(0) = 3$
b) $y' + 3y = 0, y(0) = 5$
- 38 a) $y'' - y' - 6y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 1$
b) $y'' - 4y' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3$
c) $y'' - 4y' + 13y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 5$
- 39 a) $v' + \frac{5}{11}v = 9,82$
b) $v = -21,604e^{-5t/11} + 21,604$
c) 16 m/s

- 9 a) $y = Ce^{-3x} + 4$
b) $y = Ce^{2x} - 2x - 2$
- 10 290 mbar
- 11 a) $y = C_1 e^{7x} + C_2 e^{-8x}$
b) $y = e^{2x}(A \cos 4x + B \sin 4x)$
- 12 $y = 2e^{3x} - 3e^{-2x}$
- 13 a) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x + 5$
b) $y = (C_1 x + C_2) e^{5x} + 2x + \frac{4}{5}$

Kapiteltest

- 1 $y' = ky$
- 2 VL = $y'' + y' + y = 10 + 10x - 10 + 5x^2 - 10x = 5x^2$,
HL = $5x^2$, VL = HL v.s.v.
- 3 a) $y = 3x^3 + x + C$
b) $y = \frac{e^{3x}}{9} - \frac{x^2}{2} + Cx + D$
- 4 166 m
- 5 $y(-2) \approx 1,2$
- 6 a) 1
b) $y(2) \approx 3,25$
- 7 a) $y = Ce^{7x}$
b) $y = Ce^{-x/3}$
- 8 47 000 st