matematik origo 4

Attila Szabo
Niclas Larson
Gunilla Viklund
Mikael Marklund
Daniel Dufåker

sanoma utbildning

GeoGebraexempel

Till läsaren

I ELEVBÖCKERNA I SERIEN MATEMATIK ORIGO finns uppgifter där vi rekommenderar användning av grafritande hjälpmedel. I elevböckerna ger vi exempel på hur dessa uppgifter kan lösas med grafritande räknare. Men i gymnasieskolan är det i dag allt vanligare att lösa sådana uppgifter med andra digitala hjälpmedel, t.ex. GeoGebra. Därför har vi i det här materialet valt att visa hur man kan använda GeoGebra för att lösa denna typ av uppgifter. Uppgifterna är hämtade från elevbokens exempel. Vi visar också hur man kan använda GeoGebra för att utföra de beräkningar som finns under rubriken **ON** *På din räknare*.

Exemplen med lösningar i GeoGebra finns till var och en av elevböckerna i serien Matematik Origo och är tänkta att användas parallellt med elevboken. För att göra det enkelt att hitta finns det sidhänvisningar till de exempel i elevboken som materialet bygger på. I lösningarna utgår vi från GeoGebra Classic 6, som finns tillgängligt gratis via www.geogebra.org/classic. Observera att vi visar *ett* sätt att lösa uppgifterna. Inte sällan är det möjligt att lösa dem på andra sätt eller med andra kommandon.

De uppgifter i elevboken där du uppmanas att använda grafritande räknare får du lösa med valfritt grafritande hjälpmedel.

Vi hoppas att du kommer att ha nytta av materialet!
Författarna

Har du synpunkter eller förslag på förbättringar? Hör av dig till emelie.reutersward@sanomautbildning.se

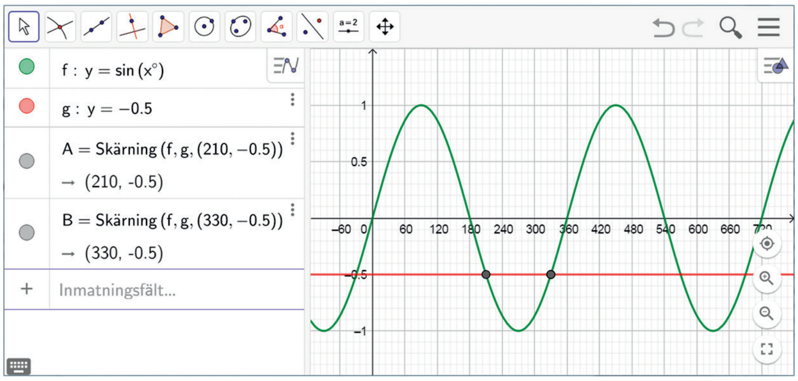
Exempel: Lös ekvationen $\sin\ x = –0{,}5$ grafiskt.

Lösning:

Du hittar gradertecknet på GeoGebras tangentbord.

Rita graferna till funktionerna $f(x) = \sin x$ och $g(x) = –0{,}5$ i GeoGebra eller för hand. Observera att man i GeoGebra måste skriva **sin (x°)** för att få vinkeln i grader.

Vi väljer **Skärning mellan två objekt** och ser att punkten A ger lösningen $x = 210°$ och att punkten B ger lösningen $x = 330°$. Båda lösningarna är periodiska med perioden 360°.



Svar: $x = 210° + n \cdot 360°$ och $x = 330° + n \cdot 360°$.

Exempel: För vilka värden på x är funktionen inte definierad?

a) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ b) $y = \tan 3x$

Lösning: a) Eftersom $\tan x$ inte är definierat för $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, så är funktionen

$y = \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ inte definierad för $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$

Vi löser ekvationen $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$

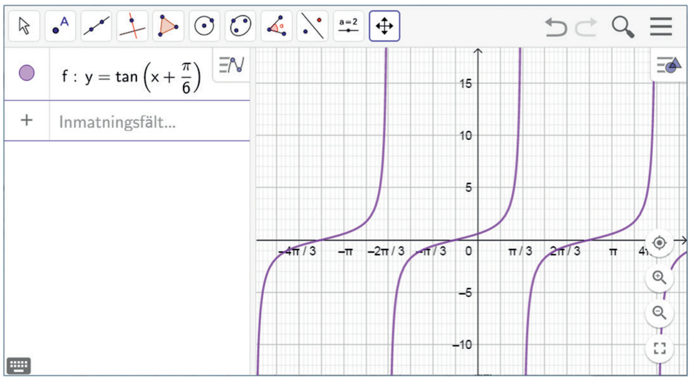
$x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi = \frac{\pi}{3} + n \cdot \pi$

Märk att kurvan $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ är förskjuten $\frac{\pi}{6}$ åt vänster i jämförelse med $y = \tan x$.

Vi kan även rita grafen i GeoGebra. Då ser vi att funktionen gör ett språng för

$x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi = \frac{\pi}{3} + n \cdot \pi$

det vill säga där funktionen inte är definierad.



Svar: Funktionen är inte definierad för $x = \frac{\pi}{3} + n \cdot \pi$.

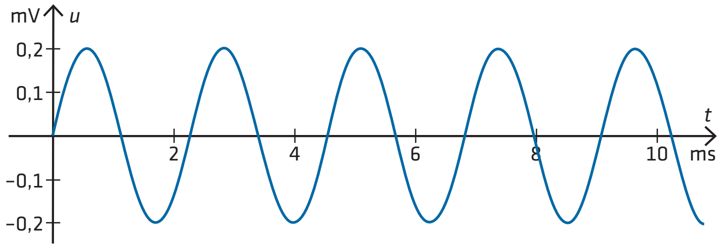
b) Funktionen $y = \tan 3x$ är inte definierad för $3x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$.

Vi löser ekvationen $3x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ genom att dela båda leden med 3.

$x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{3}$

Svar: Funktionen är inte definierad för $x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{3}$

Exempel: Tonen *ettstrukna a* har frekvensen 440 Hz, dvs. 440 svängningar per sekund. En ton uppstår genom att det blir ytterst små variationer i lufttrycket runt det som alstrar tonen. Dessa lufttrycksvariationer sprider sig och kan fångas upp av en mikrofon och omvandlas till spänning. Bilden visar den elektriska utsignalen från en mikrofon.



a) Beskriv signalen med ett funktionsuttryck av formen $u(t) = A \sin \omega t$.

b) En ton från ett instrument består ofta av en grundton tillsammans med en eller flera övertoner. Första övertonen har dubbelt så hög frekvens och i det här fallet är amplituden 0,15 mV. Rita grafen till den funktion som är summan av funktionerna som beskriver första övertonen och grundtonen på din räknare och läs av det största värdet.

Lösning:

a) Amplituden avläses i figuren till 0,2 mV.

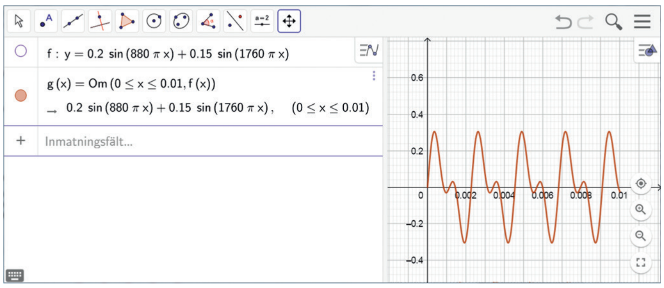
Enligt förutsättningarna är $f = 440$ Hz. Koefficienten ω kan beräknas

$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{1/f} = 2\pi f = 880\pi.$ Frekvensen $f = \dfrac{1}{T}$

Funktionen kan skrivas $u(t) = 0{,}2 \cdot \sin 880\pi t$

b) Första övertonen har dubbelt så hög frekvens. Alltså $\omega = 2 \cdot 880\pi = 1\,760\pi$. Eftersom övertonen har amplituden 0,15 mV, så kan vi beskriva den med funktionsuttrycket $u(t) = 0{,}15 \cdot \sin 1\,760\pi t$.

Vi ritar funktionen $y = 0{,}2 \cdot \sin 880\pi t + 0{,}15 \cdot \sin 1\,760\pi t$ med hjälp av GeoGebra i intervallet $0 < t < 0{,}01$. Vi väljer x som variabel i stället för t. Vi skriver in **Funktion(<Funktion>, <Från x-Värde>, <Till x-Värde>)** och matar in funktionsnamnet och intervallgränserna.



Avläsning ger att det största värdet är 30 mV.

Exempel: Bestäm största och minsta värdet till $f(x) = (x^2 - 3)^2$ i intervallet $-1 \leq x \leq 3$.

Lösning: Funktionens största och minsta värde finns antingen i en punkt där $f'(x) = 0$ eller i intervallets ändpunkter. Vi börjar med att bestämma derivatans nollställen.

$f'(x) = 2(x^2 - 3) \cdot 2x = 4x(x^2 - 3)$ Använd kedjeregeln

Sätt $f'(x) = 0$

$4x(x^2 - 3) = 0$

som ger lösningarna

$x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt{3},\ x_3 = -\sqrt{3}$

Vi bestämmer först de lokala extremvärdena genom att sätta in $x = 0$ och $x = \sqrt{3}$ i funktionsuttrycket ($x = -\sqrt{3}$ ligger inte i intervallet $-1 \leq x \leq 3$).

$f(0) = (0^2 - 3)^2 = 9$

$f(\sqrt{3}) = ((\sqrt{3})^2 - 3)^2 = 0$

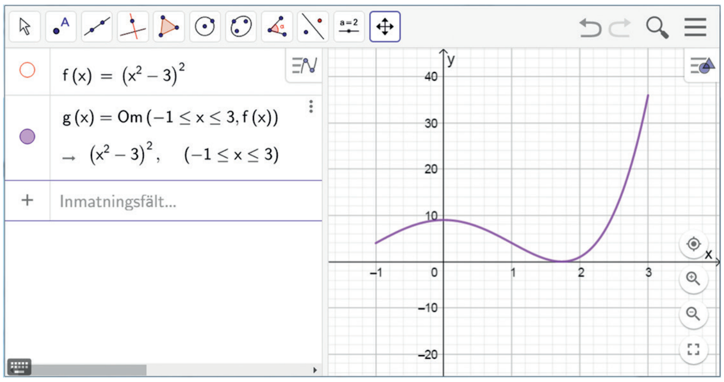
Sedan bestämmer vi funktionsvärdena i intervallets ändpunkter:

$f(-1) = ((-1)^2 - 3)^2 = 4$

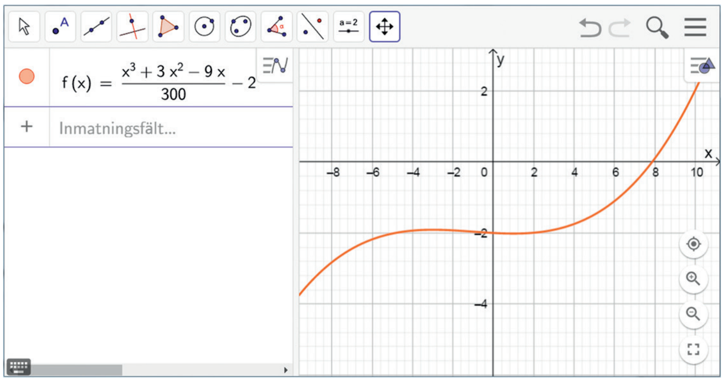
$f(3) = (3^2 - 3)^2 = 36$

Svar: I intervallet $-1 \leq x \leq 3$ är funktionens största värde 36 och det minsta värdet är 0.

Kontrollera gärna ditt resultat med hjälp av GeoGebra. Rita grafen i intervallet $-1 \leq x \leq 3$ genom att välja **Funktion(<Funktion>, <Från x-Värde>, <Till x-Värde>).**



Exempel: Daniel har ritat grafen till $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 9x}{300} - 2$ i GeoGebra.
Han påstår att funktionen har en terrasspunkt för $x = 0$. Undersök med hjälp av derivata om Daniels påstående stämmer.



Lösning: För att funktionen ska ha en terrasspunkt för $x = 0$, så måste funktionens derivata vara noll för $x = 0$. Vi börjar med att bestämma derivatan till funktionen

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 9x}{300} - 2$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 6x - 9}{300}$$

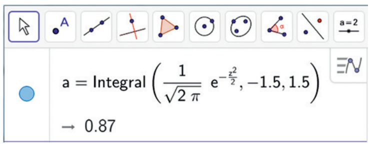
Därefter bestämmer vi derivatans värde för $x = 0$

$$f'(0) = \frac{3 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0 - 9}{300} = \frac{-9}{300} \neq 0$$

Eftersom $f'(0) \neq 0$ kan funktionen inte ha en terrasspunkt för $x = 0$.

ON *Med ditt digitala hjälpmedel*

Om du vill beräkna värdet av integralen $\int_{-1,5}^{1,5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\,dz$ med GeoGebra, skriver du **Integral(<Funktion>, <Från x-Värde>, <Till x-Värde>)** i inmatningsfältet. Mata därefter in funktionsuttrycket och integrationsgränserna.

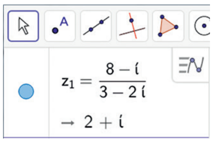


Du öppnar CAS-fönstret genom att klicka på ☰ och sedan **Visa**.

Du kan också beräkna integralen genom att mata in kommandot i CAS-fönstret. Om integralen kan bestämmas exakt, får du det exakta värdet.

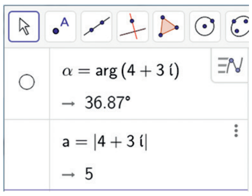
ON *Med ditt digitala hjälpmedel*

I GeoGebra kan du utföra beräkningar med komplexa tal. Vill du beräkna $\frac{8-i}{3-2i}$ skriver du **(8 – i)/(3 – 2i)** och trycker på Retur.



ON *Med ditt digitala hjälpmedel*

GeoGebra har inbyggda funktioner som hjälper dig att beräkna argumentet och absolutbeloppet av ett komplext tal. Vill du beräkna $\arg(4 + 3i)$, skriver du **arg(4 + 3i)** i inmatningsfältet. På liknande sätt kan du beräkna absolutbeloppet av $4 + 3i$ genom att skriva **abs(4 + 3i)**.



5