

matematik

origo

2c

Attila Szabo —
Niclas Larson —
Gunilla Viklund —
Mikael Marklund —
Daniel Dufåker —

Till läsaren

I **ELEVBÖCKERNA I SERIEN MATEMATIK ORIGO** finns uppgifter där vi rekommenderar användning av grafitande hjälpmedel. I elevböckerna ger vi exempel på hur dessa uppgifter kan lösas med grafitande räknare. Men i gymnasieskolan är det i dag allt vanligare att lösa sådana uppgifter med andra digitala hjälpmedel, t.ex. GeoGebra. Därför har vi i det här materialet valt att visa hur man kan använda GeoGebra för att lösa denna typ av uppgifter. Uppgifterna är hämtade från elevbokens exempel. Vi visar också hur man kan använda GeoGebra för att utföra de beräkningar som finns under rubriken **ON** På din räknare.

Exemplen med lösningar i GeoGebra finns till var och en av elevböckerna i serien Matematik Origo och är tänkta att användas parallellt med elevboken. För att göra det enkelt att hitta finns det sidhänvisningar till de exempel i elevboken som materialet bygger på. I lösningarna utgår vi från GeoGebra Classic 6, som finns tillgängligt gratis via www.geogebra.org/classic. Observera att vi visar *ett* sätt att lösa uppgifterna. Inte sällan är det möjligt att lösa dem på andra sätt eller med andra kommandon.

De uppgifter i elevboken där du uppmanas att använda grafitande räknare får du lösa med valfritt grafitande hjälpmedel.

Vi hoppas att du kommer att ha nytta av materialet!

Författarna

Har du synpunkter eller förslag på förbättringar? Hör av dig till
emelie.reutersward@sanomautbildning.se

**Exempel:**

Lös ekvationen $0,3x^2 = 2x + 3$ med grafitande hjälpmedel.

Lösning:

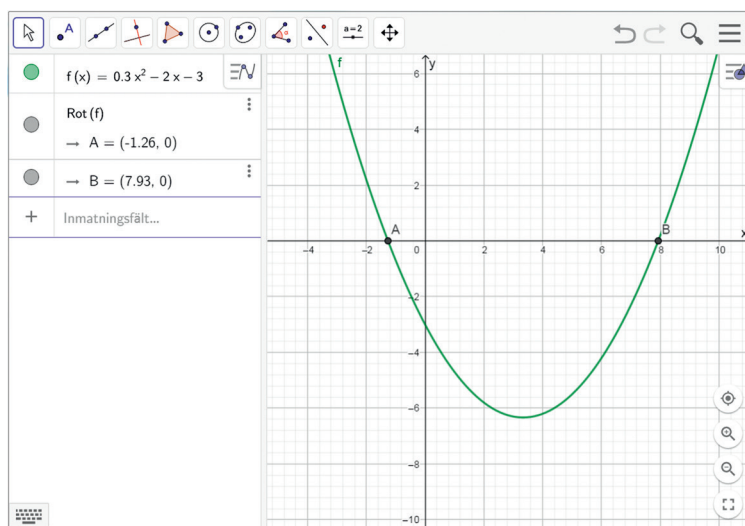
Vi skriver om ekvationen $0,3x^2 = 2x + 3$ till $0,3x^2 - 2x - 3 = 0$.

Lösningarna till ekvationen är nollställena till $f(x) = 0,3x^2 - 2x - 3$.

Vi börjar med att rita grafen till $y = 0,3x^2 - 2x - 3$ genom att skriva in $y = 0,3x^2 - 2x - 3$ i inmatningsfältet och trycka Retur.

Om det behövs, flyttar vi ritområdet eller ändrar skalan på axlarna, så att nollställena är synliga i ritområdet. Vi väljer kommandot **Nollställen**, under menyn där är överst, och klickar på grafen.

Observera att du måste använda punkt som decimaltecken. Använd ^ för att skriva upphöjt till.

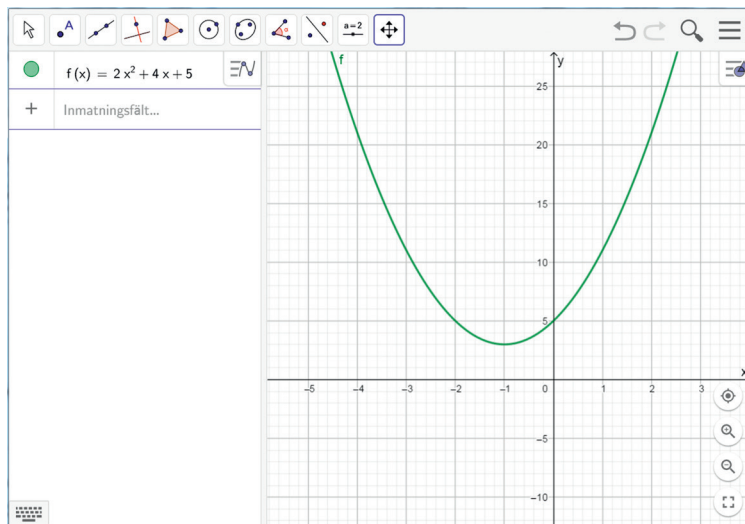


x -koordinaterna till punkt A och B ger ekvationens två lösningar.

Svar: $x_1 \approx -1,3$ och $x_2 \approx 7,9$

 **Exempel:** Lös ekvationen $2x^2 + 4x + 5 = 0$ grafiskt.

Lösning: Vi ritar grafen till $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$ genom att skriva in funktionsuttrycket i inmatningsfältet. Man ser direkt att grafen inte skär x -axeln. Det betyder att funktionen saknar nollställen och därmed att ekvationen saknar reella lösningar.



Svar: Ekvationen saknar reella lösningar.

**Exempel:**

Utgå från andragradsekvationen $x^2 - 6x + 8 = 0$

- Bestäm diskriminanten och avgör hur många lösningar ekvationen har.
- Rita grafen till $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Hur många nollställen har funktionen f ?

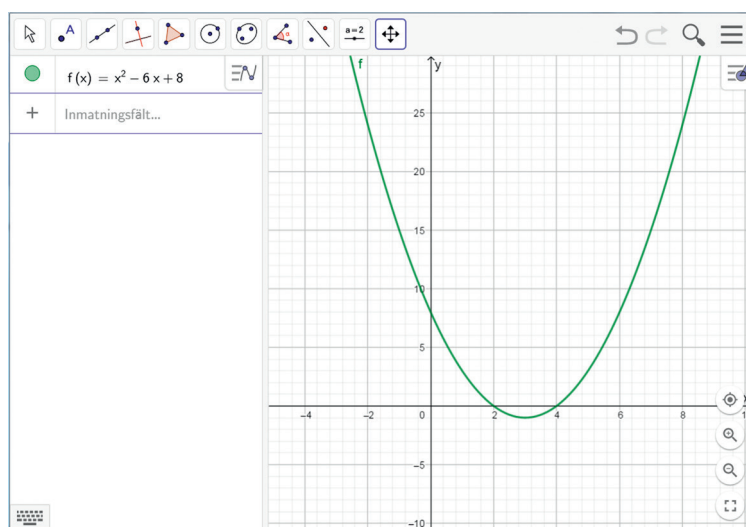
Lösning: a) Jämför ekvationen $x^2 - 6x + 8 = 0$ med $x^2 + px + q = 0$. Här är $p = -6$ och $q = 8$. Vi beräknar diskriminanten

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 8 = 9 - 8 = 1 > 0$$

Diskriminantens värde är positivt. Ekvationen har därför två lösningar.

Svar: Ekvationen har två lösningar.

- Vi ritar grafen med GeoGebra.



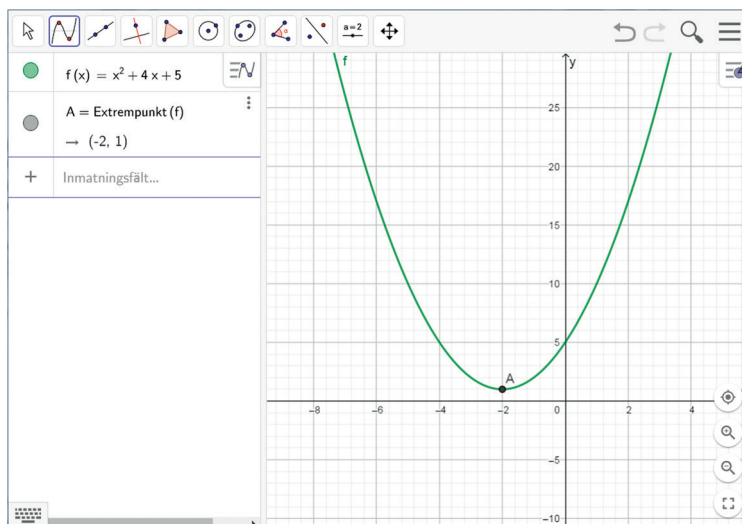
Eftersom grafen skär x -axeln två gånger har funktionen två nollställen.

Svar: Funktionen f har två nollställen.

 **Exempel:** Finn minsta värde till $f(x) = x^2 + 4x + 5$.

Lösning: Vi väljer att lösa uppgiften med GeoGebra och börjar med att rita grafen till $f(x) = x^2 + 4x + 5$.

Vi väljer kommandot  **Extrempunkt**, under menyn där  är överst, och klickar på grafen (eller i fältet till vänster om funktionsuttrycket).



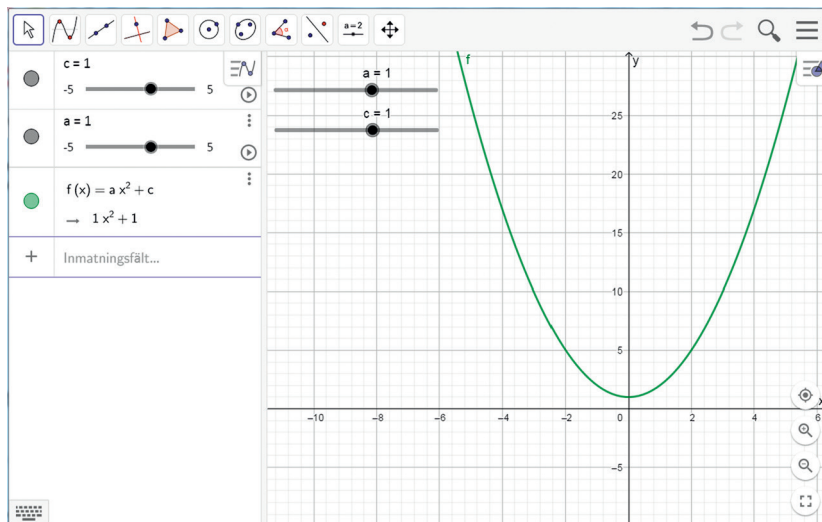
Vi ser att $(-2, 1)$ är grafens minimipunkt.

Svar: Minsta värde är 1.

Uppgift 1345, 1346 och 1347

En styrka med dynamisk programvara som GeoGebra är att man kan använda så kallade ”glidare” för att undersöka funktioner. Det är ett effektivt sätt att lösa uppgifter som **1345**, **1346** och **1347**. I den här uppgiften visar vi hur:

Du ska undersöka hur grafens utseende påverkas om man ändrar koefficienten framför x^2 respektive konstanttermen. Skriv in funktionen $f(x) = ax^2 + c$ i inmatningsfältet och klicka på **SKAPA GLIDARE**. Glidarna har från början värdena $a = 1$ och $c = 1$.



- a) Vilken funktion visas i utgångsläget, när glidarna har värdena $a = 1$ och $c = 1$?

Du kan ändra värdet på a och c genom att dra i glidarna.

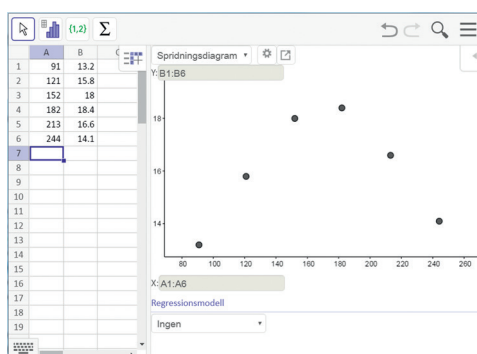
- b) Vilken betydelse har koefficienten framför x^2 för grafens utseende?
c) Vilken betydelse har konstanttermen för grafens utseende?

DAGENS LÄNGD

I en almanacka finns tider för hur länge solen är uppe. Tabellen här nedanför visar dagens längd i Stockholm under sommarhalvåret. Med hjälp av en andragsradsfunktion kan man skapa en modell för hur dagens längd beror av tiden i dagar efter nyår.

Datum	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9
Dag nr	91	121	152	182	213	244
Tid uppe (h)	13,2	15,8	18,0	18,4	16,6	14,1

- ➔ Ta fram kalkylblad via menyn **Visa**. Mata in dagarnas nummer i kolumn 1, alltså 91 i cell A1, 121 i cell A2, osv. Mata på samma sätt in tiderna för dagens längd i kolumn 2. Markera samtliga celler och välj  **Tvåvariabels regressionsanalys** under menyn där  är överst.



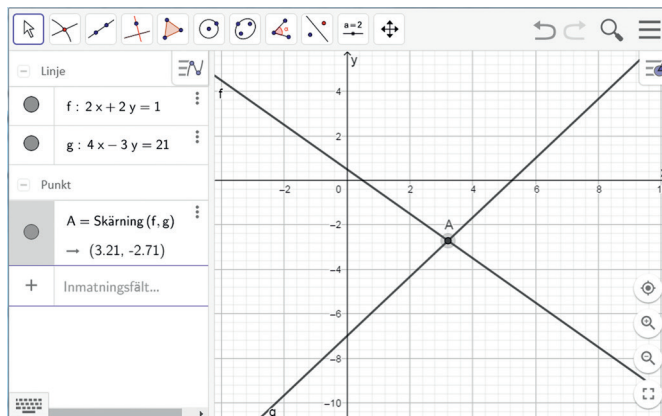
Öppna därefter rullisten under rubriken **Regressionsmodell** och välj **Polynom**. Då får du upp en andragsradsfunktion som är anpassad till punkterna i tabellen. Du ser andragsradsfunktionens uttryck nere till höger. Där kan du också mata in olika x -värden (dagens nummer) för att finna funktionsvärden (dagens längd).

- ➔ Hur länge är solen uppe på valborgsmässoafton enligt denna modell?
- ➔ Vilken är årets längsta dag enligt modellen?
- ➔ Diskutera hur pass väl modellen beskriver dagens längd. Gäller den andra orter i Sverige?

 **Exempel:** Lös ekvationssystemet med grafitande hjälpmedel.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 1 & (1) \\ 4x - 3y = 21 & (2) \end{cases}$$

Lösning: Vi använder GeoGebra. Vi skriver in ekvationerna i inmatningsfältet, en i taget. Sen väljer vi  och klickar på skärningspunkten.



Koordinaterna för skärningspunkten A ger lösningen $x \approx 3,2$ och $y \approx -2,7$.

Svar: Ekvationssystemet har lösningen $\begin{cases} x \approx 3,2 \\ y \approx -2,7 \end{cases}$

**Exempel:**

Jens sätter in 20 000 kr på ett konto med den garanterade räntan 4,5 %. Hur länge dröjer det tills pengarna har fördubblats?

Lösning:

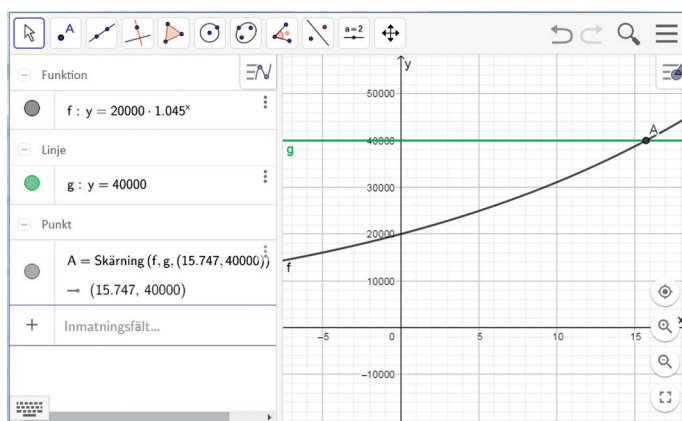
Räntan 4,5 % ger förändringsfaktorn 1,045. Om vi antar att det dröjer x år tills pengarna fördubblats, så får vi exponentialekvationen

$$20\,000 \cdot 1,045^x = 40\,000 \quad \text{När pengarna fördubblats har Jens 40 000 kr på kontot}$$

Den här ekvationen kan vi lösa grafiskt genom att rita $y = 20\,000 \cdot 1,045^x$ och $y = 40\,000$ i samma koordinatsystem. Lösningen till ekvationen kan vi avläsa som x -koordinaten till skärningspunkten mellan kurvorna.

Mata i tur och ordning in de två funktionsuttrycken i inmatningsfältet.

Välj  under menyn med  överst och klicka på skärningspunkten.



Svar: Efter 16 år har pengarna på kontot fördubblats.

ON Med ditt digitala hjälpmedel

Vill man beräkna 10-logaritmen av 15 i GeoGebra, så skriver man **lg(15)** i inmatningsfältet och trycker på Retur.

$$a = \log_{10}(15)$$

$$\rightarrow 1.176$$

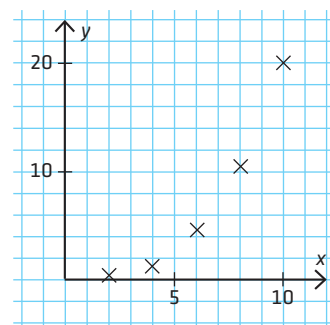
Du kan också välja knappen **log₁₀** på GeoGebras tangentbord under fliken **f(x)**.

3

LOGARITMER OCH POTENSSAMBAND

Vid ett naturvetenskapligt experiment mätte man två storheter x och y . Det fanns en misstanke om att man kunde beskriva sambandet mellan storheterna som ett potenssamband, det vill säga som ett samband av formen $y = Cx^b$ ($C > 0$ och $b > 1$).

x	2,0	4,0	6,0	8,0	10,0
y	0,16	1,28	4,32	10,24	20,00



Ett sätt att undersöka om sambandet mellan storheterna x och y verkligen är ett potenssamband, är att undersöka om sambandet mellan $\lg y$ och $\lg x$ är linjärt. Om sambandet visar sig vara linjärt, så är linjens riktningskoefficient konstanten b och linjens skärning med y -axeln är $\lg C$.

- Gör en ny tabell med $\lg x$ och $\lg y$.
- Bestäm konstanterna b och C på det sätt som beskrivits för de mätvärden som finns i tabellen. I rutan här nedanför visar vi hur du kan lösa uppgiften med GeoGebra.
- Rita $y = Cx^b$ för att kontrollera att metoden fungerar.
- Förklara varför denna metod alltid fungerar om det sökta sambandet är ett potenssamband.

Vi tar fram kalkylblad via menyn **Visa** och matar in värdena för $\lg x$ i kolumn 1, och värdena för $\lg y$ i kolumn 2. Vi skriver t.ex. in $\lg(20)$ i cell B5.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	0.301	-0.796								
2	0.602	0.107								
3	0.778	0.635								
4	0.903	1.01								
5	$\lg(20)$									
6										
7										
8										
9										
10										
11										
12										
13										
14										
15										
16										
17										

När vi har matat in samtliga värden på rad 1 och 2, markerar vi samtliga celler och väljer  under menyn . Vi väljer regressionsmodell **Linjär**, om funktionen inte kommer upp automatiskt. Under grafen ser du linjens ekvation.

 Exempel:

Kökschefen på en skola vill göra en undersökning av hur mycket mat som slängs på ett år. Hon gör därför två stickprov under två olika veckor. Beräkna medelvärde och standardavvikelse för Vecka A och Vecka B.

	Må	Ti	On	To	Fr
Vecka A	22,3 kg	15,0 kg	38,3 kg	16,7 kg	13,8 kg
Vecka B	13,5 kg	9,8 kg	12,6 kg	14,9 kg	13,5 kg

Lösning:

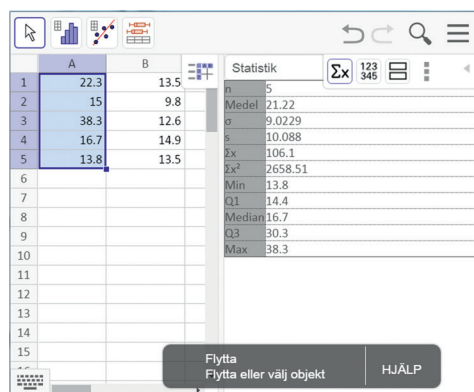
Vi använder GeoGebra för att beräkna medelvärde och standardavvikelse. Mata in värdena för vecka A i kolumn A och värdena för vecka B i kolumn B. Markera cellerna i kolumn A och välj . Klicka sedan på symbolen Σx . Då får du en lista på statistiska värden för materialet. Avläs resultatet.

Vecka A:

Medelvärde 21,2 kg

Standardavvikelse 10,1 kg

Avläs s, standardavvikelse vid stickprovsundersökning.



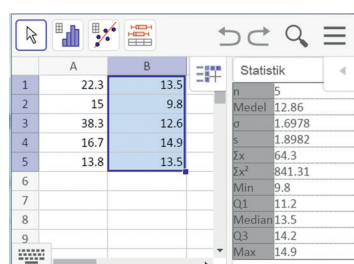
Standardavvikelsen betecknas med s för en stickprovsundersökning och med σ för totalundersökning. Q_1 och Q_3 står för nedre och övre kvartil.

Gör på samma sätt med vecka B.

Vecka B:

Medelvärde 12,9 kg

Standardavvikelse 1,9 kg



Under måndagen och onsdagen i vecka A slängdes det mer mat än vanligt. Det gör att både medelvärdet och standardavvikelsen är högre i vecka A än i vecka B. Kanske serverade kökschefen dessa dagar något som eleverna inte gillade, vilket gjorde att det slängdes mer mat. Förhoppningsvis är vecka B en mer normal vecka och då är det detta medelvärde som kökschefen bör använda i sin analys.

Exempel:

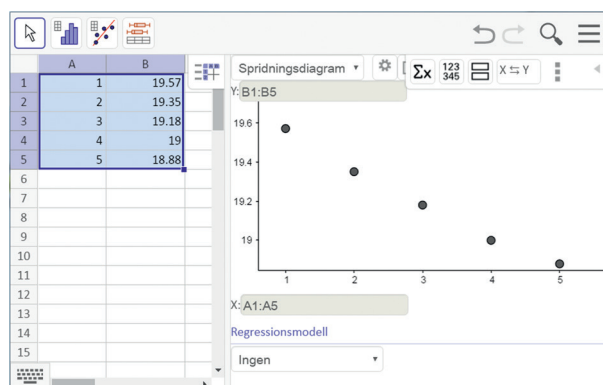
Maria tränar längdskidåkning. Hon åker regelbundet ett spår som är 5 km långt. Under fem veckor efter jul försöker hon förbättra sina tider. Pricka in värdena i ett spridningsdiagram med hjälp av din räknare och avgör om det finns någon korrelation mellan värdena.

Vecka	1	2	3	4	5
Tid	19.34	19.21	19.11	19.00	18.53

Lösning:

Skriv in värdena i ett kalkylblad i GeoGebra. Markera cellerna och välj  under menyn . Välj **Ingen** under rubriken **Regressionsmodell** i nederkant.

Vi omvandlar tiderna till minuter. Tiden 19 minuter och 34 sekunder är t.ex. 19,57 minuter.



Svar: I diagrammet ser man att det finns en negativ korrelation mellan antal veckor Maria tränat och hennes åktider.

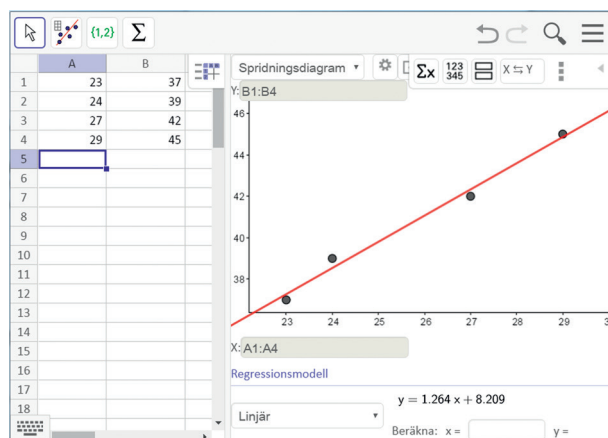
**Exempel:**

Tabellen visar några samhörande mätvärden på skostorlek y och fotlängd x cm. Anpassa en rät linje till mätvärdena med grafitande hjälpmedel och bestäm linjens ekvation.

x	23	24	27	29
y	37	39	42	45

Lösning:

Skriv in värdena i två kolumner i ett kalkylblad i GeoGebra. Markera värdena och välj  under menyn . Välj **Linjär** som regressionsmodell. Du får då upp både grafen och ekvationen till den räta linje som anpassats till punkterna.



Den räta linjens ekvation är $y = 1,26x + 8,21$.

Vi avrundar till två decimaler