

matematik

Origo

5

Attila Szabo —
Niclas Larson —
Gunilla Viklund —
Mikael Marklund —
Daniel Dufåker —

Till läsaren

I **ELEVBÖCKERNA I SERIEN MATEMATIK ORIGO** finns uppgifter där vi rekommenderar användning av grafitande hjälpmedel. I elevböckerna ger vi exempel på hur dessa uppgifter kan lösas med grafitande räknare. Men i gymnasieskolan är det i dag allt vanligare att lösa sådana uppgifter med andra digitala hjälpmedel, t.ex. GeoGebra. Därför har vi i det här materialet valt att visa hur man kan använda GeoGebra för att lösa denna typ av uppgifter. Uppgifterna är hämtade från elevbokens exempel. Vi visar också hur man kan använda GeoGebra för att utföra de beräkningar som finns under rubriken **ON** På din räknare.

Exemplen med lösningar i GeoGebra finns till var och en av elevböckerna i serien Matematik Origo och är tänkta att användas parallellt med elevboken. För att göra det enkelt att hitta finns det sidhänvisningar till de exempel i elevboken som materialet bygger på. I lösningarna utgår vi från GeoGebra Classic 6, som finns tillgängligt gratis via www.geogebra.org/classic. Observera att vi visar *ett* sätt att lösa uppgifterna. Inte sällan är det möjligt att lösa dem på andra sätt eller med andra kommandon.

De uppgifter i elevboken där du uppmanas att använda grafitande räknare får du lösa med valfritt grafitande hjälpmedel.

Vi hoppas att du kommer att ha nytta av materialet!

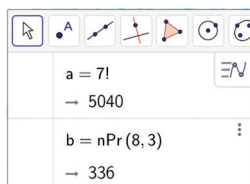
Författarna

Har du synpunkter eller förslag på förbättringar? Hör av dig till
emelie.reutersward@sanomautbildning.se

ON Med ditt digitala hjälpmedel

GeoGebra har funktioner för att beräkna fakultet och för att beräkna $P(n, k)$.

Vill du beräkna $7!$, skriver du in **7!** i inmatningsfältet. Om du i stället vill beräkna $P(8, 3)$, skriver du in **nPr(8, 3)** i inmatningsfältet.



ON Med ditt digitala hjälpmedel

GeoGebra har en funktion för att beräkna antalet kombinationer.

Om du vill beräkna $\binom{8}{3}$, skriver du in **BinomialKoefficient(8, 3)** i inmatningsfältet.



ON Med ditt digitala hjälpmedel

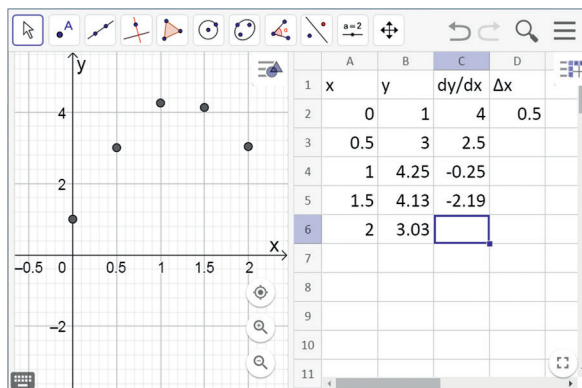
Vi använder citattecken runt rubrikerna.

Vi använder GeoGebras kalkylblad för att lösa differentialekvationen $y' = 4 - xy$ med Eulers stegmetod. Vi börjar med att skriva in rubrikerna x , y , $\frac{dy}{dx}$ och Δx i kalkylbladet. Vi skriver in begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ under rubrikerna x och y i cell A2 och B2. Därefter beräknar vi derivatan i cell C2 genom att skriva $=4-A2*B2$.

Vi väljer steglängden 0,5 och beräknar x -värdet i cell A3 genom att skriva $=A2+0.5$ och y -värdet i cell B3 genom att skriva $=B2+0.5*C2$. Därefter tar vi tag i cell A3, B3 och C2 och drar nedåt så att värdet i cellerna uppdateras.

För att plotta punkterna markerar vi kolumn A och B i kalkylbladet, högerklickar och väljer **Lista med punkter**.

Vi ser att $y(2) \approx 3$.



Vi kan också lösa differentialekvationen med hjälp av programmering. Det här programmet använder Eulers stegmetod och returnerar en approximation av $y(2)$.

```
import math
def f(x, y):
    return 4 - x * y          #Vi skriver in högerledet i differential-
                              #ekvationen y' = 4 - xy
def Euler(x0, y0, xs, n, f):
    h = (xs - x0) / float(n)
    x = x0
    y = y0
    for i in range(n):
        y = y + h * f(x, y)
        x = x + h
    return y
print(Euler(0,1,2,4,f))      #Vi anger begynnelsevillkoret, det slutliga
                              #x-värdet och antal steg. Eftersom steglängden
                              #ska vara 0,5 blir antalet steg 4.
```

x_0 är begynnelsevärdet på x
 y_0 är begynnelsevärdet på y
 x_s är det slutliga värdet på x
 n är antal steg

3.03125

 Exempel:

I den allra enklaste tillväxtmodellen för en population utgår man från att tillväxthastigheten är proportionell mot populationens storlek N , dvs. $\frac{dN}{dt} = kN$.

På grund av begränsande faktorer som t.ex. tillgång på mat, är det i många sammanhang rimligare att anta att det finns en maximal storlek M för populationen. En modell som bättre beskriver tillväxten över tid är i sådana fall den *logistiska tillväxtmodellen* $\frac{dN}{dt} = kN(M - N)$.

Tjugo kackerlackor finns i ett begränsat område. Enligt en uppskattning kommer maximalt 500 kackerlackor att kunna överleva i området. Proportionalitetskonstanten k bedöms vara 0,003.

- Använd modellen $\frac{dN}{dt} = kN(M - N)$, där $N(t)$ är antalet kackerlackor vid tiden t månader, och lös ekvationen med aktuella värden.
- Rita en graf till lösningen och förklara kurvans utseende.
- Efter hur många veckor har populationen av kackerlackor uppnått halva maximala antalet?

Lösning: a) För $k = 0,003$ och $M = 500$ får vi

$$\frac{dN}{dt} = 0,003N(500 - N) \text{ med } N(0) = 20 \quad \text{Från början fanns det 20 kackerlackor.}$$

Vi använder Geogebra för att lösa differentialekvationen. Vi börjar med att öppna CAS-fönstret. I inmatningsfältet skriver vi **LösODE**. Då kommer det upp ett antal alternativ att välja mellan. Vi väljer **LösODE(<Ekvation>, <Punkt(er) på f>)** och skriver in ekvationen $y' = 0,003y(500 - y)$ och punkten $(0, 20)$.

Lösningen kan skrivas

$$N = \frac{500e^{1,5t}}{24 + e^{1,5t}}$$

- b) Vi ritar kurvan $N = \frac{500e^{1,5t}}{24 + e^{1,5t}}$ i GeoGebra.

Av modellen framgår det att när populationen N är lika stor som den maximala populationsstorleken, dvs. $N = 500$, så är tillväxthastigheten noll. Populationen har då uppnått den storlek som svarar mot miljöns bärförmåga. Kackerlackorna har blivit så många att födan inte räcker till fler. Det förklarar varför kurvan planar ut.

- c) Vi lägger in grafen till $g(x) = 250$ tillsammans med föregående graf och söker skärningspunkten med hjälp av . Av grafen kan vi se att det tar ca 2 månader för populationen att uppnå antalet 250.

Du öppnar CAS-fönstret genom att klicka på  och sedan **Visa**.

