

matematik

ORIGO

Attila Szabo —
Niclas Larson —
Gunilla Viklund —
Mikael Marklund —
Daniel Dufåker —

VUX
1b/1c



Till läsaren

I **ELEVBÖCKERNA I SERIEN MATEMATIK ORIGO** finns uppgifter där vi rekommenderar användning av grafitande hjälpmedel. I elevböckerna ger vi exempel på hur dessa uppgifter kan lösas med grafitande räknare. Men i gymnasieskolan är det i dag allt vanligare att lösa sådana uppgifter med andra digitala hjälpmedel, t.ex. GeoGebra. Därför har vi i det här materialet valt att visa hur man kan använda GeoGebra för att lösa denna typ av uppgifter. Uppgifterna är hämtade från elevbokens exempel. Vi visar också hur man kan använda GeoGebra för att utföra de beräkningar som finns under rubriken **ON** På din räknare.

Exemplen med lösningar i GeoGebra finns till var och en av elevböckerna i serien Matematik Origo och är tänkta att användas parallellt med elevboken. För att göra det enkelt att hitta finns det sidhänvisningar till de exempel i elevboken som materialet bygger på. I lösningarna utgår vi från GeoGebra Classic 6, som finns tillgängligt gratis via www.geogebra.org/classic. Observera att vi visar *ett* sätt att lösa uppgifterna. Inte sällan är det möjligt att lösa dem på andra sätt eller med andra kommandon.

De uppgifter i elevboken där du uppmanas att använda grafitande räknare får du lösa med valfritt grafitande hjälpmedel.

Vi hoppas att du kommer att ha nytta av materialet!

Författarna

Har du synpunkter eller förslag på förbättringar? Hör av dig till
emelie.reutersward@sanomautbildning.se

ON Med ditt digitala hjälpmedel

I GeoGebra är det ingen skillnad mellan tangenten som betecknar negativa tal och tangenten för subtraktion. För att beräkna uttrycket $-2 - 5$ skriver du $-2 - 5$ i inmatningsfältet.



ON Med ditt digitala hjälpmedel

För att beräkna potensen 5^3 i GeoGebra skriver du **5^3** i inmatningsfältet. Du kan också använda knappen  på GeoGebras tangentbord. Du öppnar tangentbordet genom att klicka på  i fönstrets nederkant.



**Exempel:**

Beräkna $4 \cdot 3^2 - \frac{10}{2} + \frac{24}{3 - 11}$ med hjälp av GeoGebra.

Lösning:

Skriv in uttrycket i inmatningsfältet och kontrollera att GeoGebra tolkar uttrycket på rätt sätt.

$$4 * 3^2 - 10/2 + 24/(3 - 11)$$

GeoGebra använder sig automatiskt av prioriteringsreglerna. Resultatet 28 avläses i algebrafönstret.

$$c = 4 \cdot 3^2 - \frac{10}{2} + \frac{24}{3 - 11}$$

$$\rightarrow 28$$



ON Med ditt digitala hjälpmedel

Vill du beräkna $6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 1,3 \cdot 10^{24}$ i GeoGebra skriver du **$6.7 * 10^{-11} * 1.3 * 10^{24}$** i inmatningsfältet. GeoGebra ger då svaret 87 100 000 000 000. Vill du ha svaret i grundpotensform börjar du skriva **grundpotensform** i inmatningsfältet. Du får då upp ett antal alternativ. Välj **Grundpotensform(<Tal>)** och mata in talet. GeoGebra ger resultatet i form av en text.

$$a = 6.7 \cdot 10^{-11} \cdot 1.3 \cdot 10^{24}$$

$$\rightarrow 87100000000000$$

$$\text{Text1} = "8.71 \times 10^{13}"$$



ON Med ditt digitala hjälpmedel

Tecknet för roten ur hittar du på GeoGebras tangentbord. Du öppnar tangentbordet genom att klicka på  i fönstrets nederkant. Vill du beräkna exempelvis $\sqrt{10}$ kan du även skriva **sqrt(10)** i inmatningsfältet.

För att beräkna $\sqrt[3]{64}$ öppnar du GeoGebras tangentbord, väljer fliken **f(x)** och klickar på . Du kan också skriva **nrot(64, 3)** direkt i inmatningsfältet.

$$a = \sqrt{10}$$

$$\rightarrow 3.16$$

$$b = \sqrt[3]{64}$$

$$\rightarrow 4$$

2

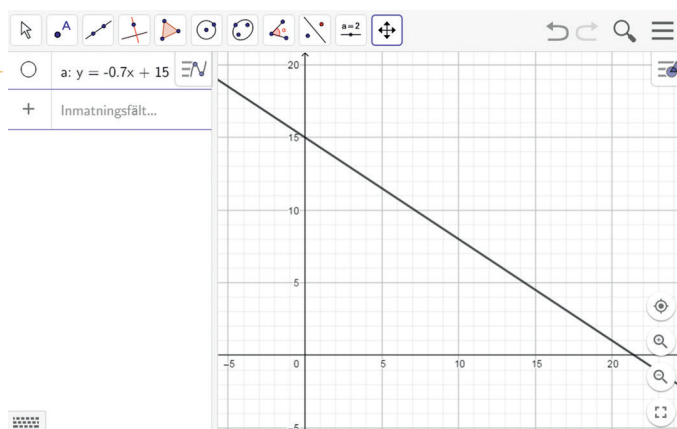
**Exempel:**

- a) Rita grafen till ekvationen $y = -0,7x + 15$ med grafitande hjälpmedel.
 b) Bestäm x så att $y = 0$ med hjälp av grafen.

Lösning:

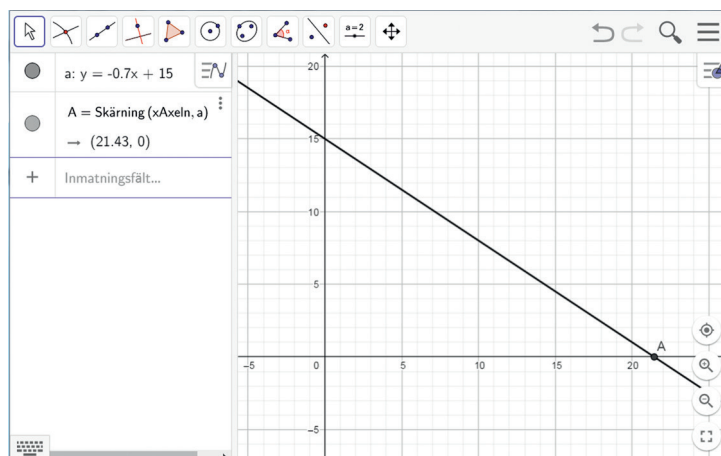
- a) Skriv in ekvationen $y = -0,7x + 15$ i inmatningsfältet och tryck Retur.

Observera att du måste använda punkt som decimaltecken.



- b) Vi ska finna den punkt där $y = 0$, dvs. den punkt där grafen skär x -axeln. Välj **Skärning mellan två objekt** under menyn där är överst.

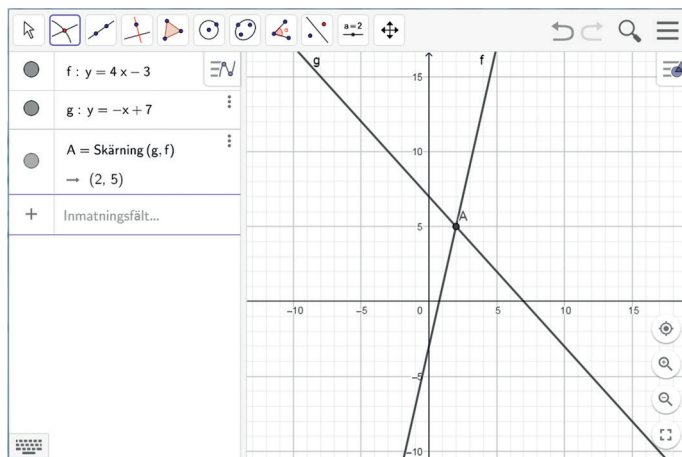
Klicka sedan i tur och ordning på x -axeln och på linjen. Punkten $(21,43; 0)$ markeras och syns i algebrafönstret. Det betyder att grafen skär x -axeln när $x \approx 21,4$.



Svar: $x \approx 21,4$

 **Exempel:** Lös ekvationen $4x - 3 = 7 - x$ med grafitande hjälpmedel.

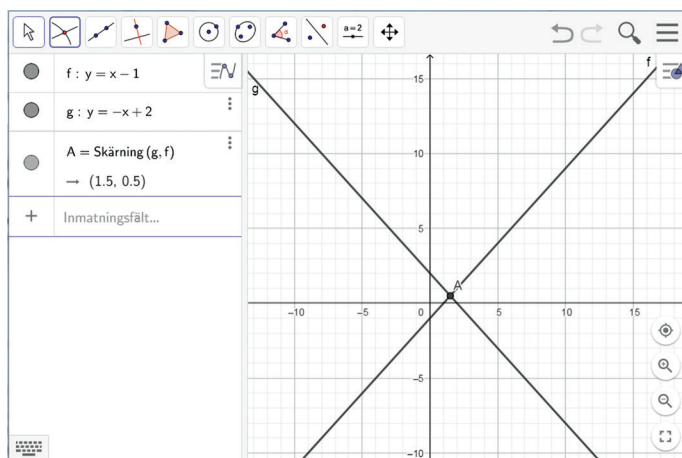
Lösning: Vi löser uppgiften med GeoGebra. Först ritar vi graferna till $y = 4x - 3$ och $y = 7 - x$ genom att skriva in dem en i taget i inmatningsfältet. Vi väljer sedan  under menyn där  är överst och klickar i tur och ordning på var och en av linjerna. Skärningspunkten $A = (2, 5)$ markeras.



Svar: Ekvationen har lösningen $x = 2$.

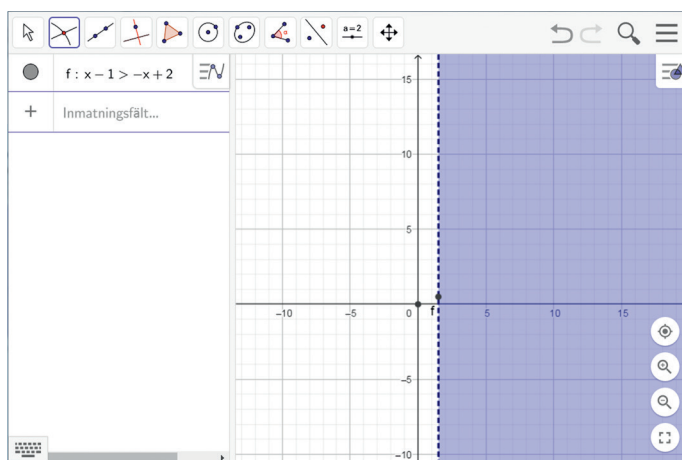
 **Exempel:** Lös olikheten $x - 1 > -x + 2$ med grafitande hjälpmedel.

Lösning: Vi löser uppgiften med GeoGebra. Först ritar vi graferna till $y = x - 1$ och $y = -x + 2$. Grafernas skärningspunkt bestämmer vi på samma sätt som i exemplet på föregående sida.



Som vi kan se i figuren ligger linjen $y = x - 1$ ovanför linjen $y = -x + 2$ för alla värden till höger om skärningspunkten. Alltså är $x - 1 > -x + 2$ för $x > 1,5$.

Vi kan också låta GeoGebra lösa olikheten direkt. Då skriver vi in olikheten $x - 1 > -x + 2$ i inmatningsfönstret och trycker på Retur. GeoGebra markerar då alla punkter (x, y) i planet som uppfyller olikheten. Vi ser att $x > 1,5$ löser olikheten.



**Exempel:**

Inköpspriset på en traktor är 372 000 kr. Traktorns värde minskar därefter med 18 % per år.

- Ange en ekvation av formen $y = Ca^x$ som beskriver traktorns värde y kr efter x år.
- Efter hur många år är traktorn värd mindre än 120 000 kr?

Lösning:

- En minskning med 18 % innebär att förändringsfaktorn är 0,82, $a = 0,82$. Det återstår att bestämma C i funktionen $y = C \cdot 0,82^x$. Om $x = 0$ är $y = 372\,000$, vilket ger $372\,000 = C \cdot 0,82^0$ och alltså $C = 372\,000$.

Svar: Ekvationen är $y = 372\,000 \cdot 0,82^x$

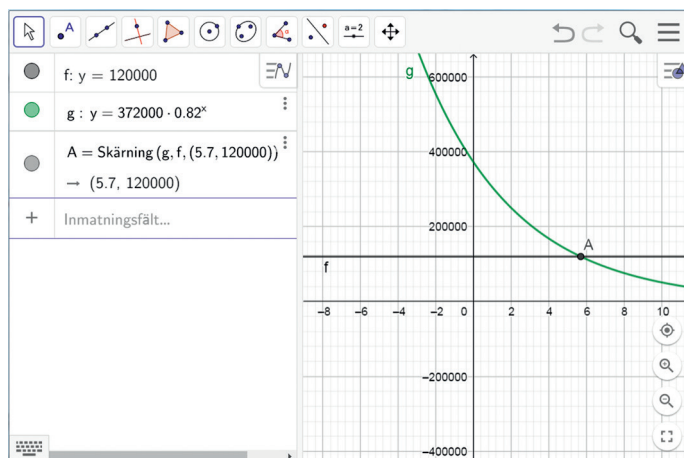
- Vi löser ekvationen $120\,000 = 372\,000 \cdot 0,82^x$ genom att först rita graferna till $y = 120\,000$ och $y = 372\,000 \cdot 0,82^x$. Sedan bestämmer vi x -värdet för grafernas skärningspunkt. Vi använder GeoGebra.

Skalan på y-axeln måste gå över 120 000 för att grafen till $y = 120\,000$ ska synas.

Skriv in de två funktionerna i inmatningsfältet. Om du inte ser graferna i ritområdet, behöver du ändra skalan på axlarna. Välj  och dra i respektive axel tills graferna visas i ritområdet.

För att ställa in skalan kan du även högerklicka i ritområdet och välja . Du får då upp ett fönster där du kan mata in önskade värden för nedre och övre gräns på respektive axel.

Bestäm koordinaterna för grafernas skärningspunkt med hjälp av kommandot . Det ger $x \approx 5,7$.



Svar: Efter 6 år är traktorn värd mindre än 120 000 kr.

ON Med ditt digitala hjälpmedel

För att beräkna uttrycket $\sqrt[4]{9}$ öppnar du GeoGebras tangentbord , väljer fliken **f(x)** och klickar på .

$$a = \sqrt[4]{9}$$

$$\rightarrow 1.73$$

Du kan också skriva **nrot(4, 9)** direkt i inmatningsfältet.



**Exempel:**

Antalet invånare i en kommun minskade på 7 år från 32 567 till 27 278. Hur stor var den genomsnittliga årliga minskningen uttryckt i procent?

Lösning:

Den årliga minskningen ger förändringsfaktorn x .

Vi ska lösa ekvationen

$$27\,278 = 32\,567 \cdot x^7$$

På 7 år minskar antalet invånare från 32 567 till 27 278

$$\frac{27\,278}{32\,567} = \frac{32\,567 \cdot x^7}{32\,567}$$

Vi delar båda led med 32 567

$$x^7 = \frac{27\,278}{32\,567}$$

$$x = \sqrt[7]{\frac{27\,278}{32\,567}}$$

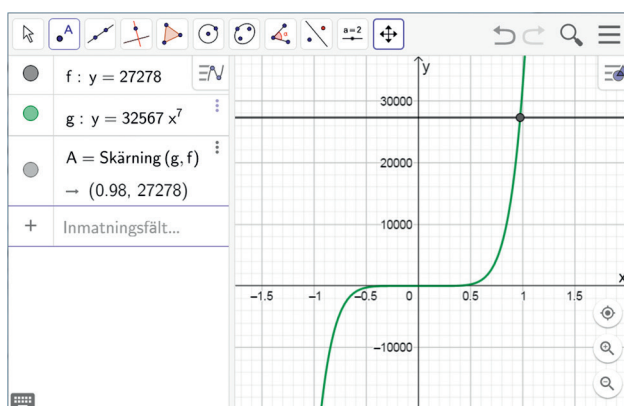
Udda exponent ger exakt en lösning. Använd digitalt hjälpmedel

$$x \approx 0,975$$

Förändringsfaktorn $x \approx 0,975$ motsvarar en minskning med $1 - 0,975 = 0,025 = 2,5 \%$.

Svar: Antalet invånare i kommunen minskade i genomsnitt med 2,5 %.

Om du vill lösa ekvationen grafiskt med hjälp av GeoGebra, så börjar du med att skriva in $y = 27\,278$ och $y = 32\,567 \cdot x^7$ i inmatningsfältet. Ställ sedan in skalan på axlarna genom att välja  och dra i respektive axel tills graferna visas i ritområdet. Bestäm var graferna skär varandra genom att välja  och därefter markera skärningspunkten. Om du har ställt in att alla tal ska anges med tre decimaler, kan du nu se att $x \approx 0,975$.



**Exempel:**

När Alice sätter in 10 000 kr i en sparfond med fast ränta blir hon lovad att beloppet kommer att fördubblas på 12 år. Vilken är fondens årsränta?

Lösning:

Räntan vi söker ger förändringsfaktorn x .

Den ekvation vi ska lösa blir

$$10\,000 \cdot x^{12} = 20\,000 \quad \text{Efter tolv år har beloppet fördubblats}$$

$$x^{12} = 2$$

Vi har delat bägge led med 10 000. Båda leden upphöjs till $\frac{1}{12}$

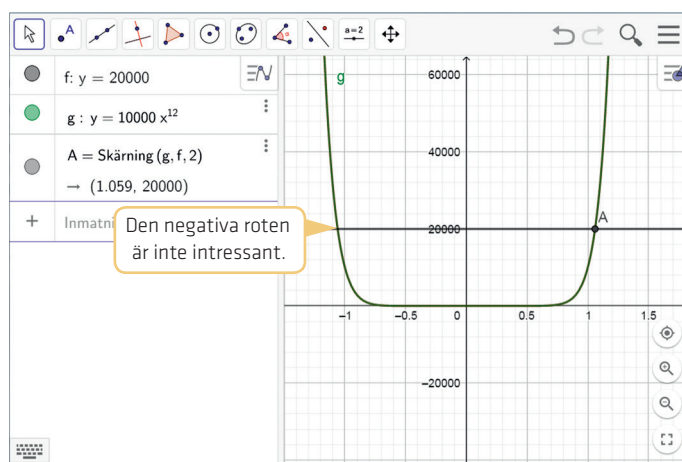
$$x = \pm 2^{1/12}$$

Den negativa roten är inte intressant

$$x \approx 1,059$$

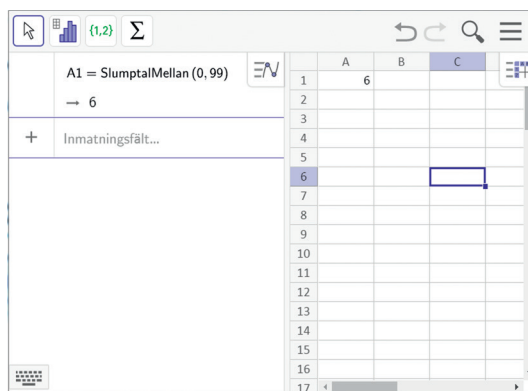
Svar: Är fondens årsränta 5,9 %, så fördubblas beloppet på 12 år.

Om du vill lösa ekvationen grafiskt med hjälp av GeoGebra, börjar du med att skriva in $y = 20\,000$ och $y = 10\,000 \cdot x^{12}$ i inmatningsfältet. Ställ sedan in skalan på axlarna genom att välja  och dra i respektive axel tills graferna visas i ritområdet. Bestäm var graferna skär varandra genom att välja  och därefter klicka på skärningspunkten. Om du har angett att alla tal ska anges med tre decimaler, kan du nu se att $x \approx 1,059$.



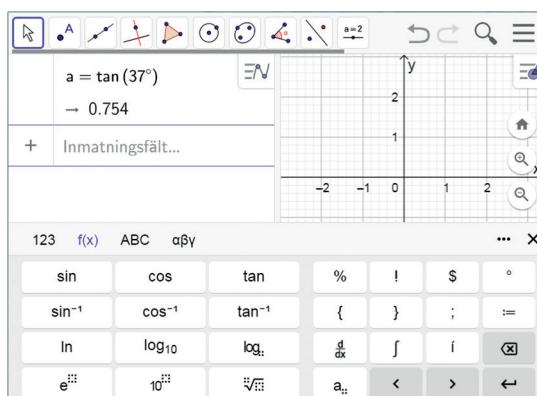
ON Med ditt digitala hjälpmedel

Om du vill ta fram slumptal med GeoGebra, så går du till menyn **Visa** och väljer **Kalkylblad**. För att få fram ett slumptal mellan 0 och 99 i cell A1 skriver du **A1=SlumptalMellan(0, 99)** i inmatningsfältet och trycker Retur. För att generera fler slumptal, tar du tag i nedre högra hörnet på cellen och drar nedåt. Du kan generera slumptal i Excel på ungefär samma sätt.



ON Med ditt digitala hjälpmedel

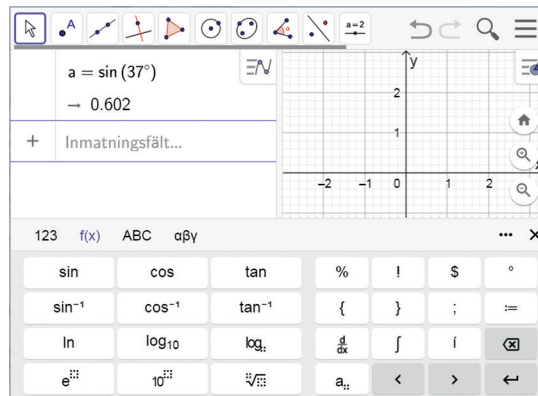
Du kan använda GeoGebra för att beräkna tangens för en vinkel. Se först till att GeoGebra är inställt på grader. Det ser du i **Inställningar**. För att beräkna värdet av $\tan 37^\circ$ skriver du **tan 37°** i inmatningsfältet. Graderstecknet hittar du på tangentbordet.



Graderstecknet finns under fliken **f(x)** på tangentbordet.

ON Med ditt digitala hjälpmedel

Du kan använda GeoGebra för att beräkna sinus för en vinkel. Se först till att GeoGebra är inställt på grader. Det ser du i **Inställningar**. För att beräkna värdet av $\sin 37^\circ$ skriver du **sin 37°** i inmatningsfältet. Gradertecknet hittar du på tangentbordet.



Värdet av cosinus för en vinkel beräknas på liknande sätt.

ON Med ditt digitala hjälpmedel

För att beräkna den vinkel som motsvarar sinusvärdet $\frac{3}{5}$ skriver du **arcsin(3/5)** i inmatningsfältet.

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\rightarrow 36.87^\circ$$

