matematik

origo 1b

Prov, Övningsblad och Aktiviteter

SANOMA UTBILDNING

Multiplikation och division av potenser samt potens av potens

Potenslagar

Multiplikation av potenser med samma bas

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ t.ex. $2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$

Division av potenser med samma bas

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ t.ex. $\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$

Potens av potens

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ t.ex. $(2^5)^3 = 2^{5 \cdot 3} = 2^{15}$

1 Skriv som en potens med angiven bas.

Exempel: 27 (med basen 3): $27 = 3^3$

a) 8 (med basen 2)
b) 81 (med basen 9)
c) 64 (med basen 4)
d) 625 (med basen 5)
e) 100 000 (med basen 10)

2 Förenkla med hjälp av potenslagarna. Svara i potensform.

a) $5^2 \cdot 5^4$
b) $2^3 \cdot 2^6 \cdot 2^7$
c) $3^3 \cdot 3 \cdot 3^4$
d) $11^{11} \cdot 11^2$
e) $(-8)^3 \cdot (-8)^4 \cdot (-8)^{10}$

3 Förenkla med hjälp av potenslagarna. Svara i potensform.

a) $(12^{2)3}$
b) $(11^3)^4 \cdot 11^2$
c) $6 \cdot (6^2)^5$
d) $2^3 \cdot (2^3)^2$
e) $10 \cdot (10^4)^5 \cdot 10^7$

4 Förenkla med hjälp av potenslagarna. Svara i potensform.

a) $\frac{7^7}{7^2}$
b) $\frac{4^{16}}{4^{10}}$
c) $\frac{3^{14} \cdot 3^2}{3^{11}}$
d) $\frac{(7^7)^3}{7}$
e) $\frac{5^{14}}{5^2 \cdot 5^{11}}$
f) $\frac{(-9)^{12}}{(-9)^9}$

5 Beräkna utan räknare.

a) $7^2 + 7^2$
b) $(2^3)^2 - 5^2$
c) $(2-5)^2$
d) $10^3 + 10^2 \cdot 10^2$
e) $\frac{9^4}{9^3} + 9^2$

6 Beräkna utan räknare

a) $2^3 \cdot 2^4$ och $2^3 + 2^4$
b) $(3^2)^2$ och $2 \cdot 3^2$
c) $2^2 + 5^2$ och $2^2 \cdot 5^2$
d) $(-4)^2$ och -4^2
e) $\frac{10^2}{10^1}$ och $10^2 - 10^1$

MATEMATIK ORIGO © SANOMA UTBILDNING OCH FÖRFATTARNA

FACIT

1 a) 2^3
b) 9^2
c) 4^3
d) 5^4
e) 10^5

2 a) 5^6
b) 2^{16}
c) 3^8 $(3^3 \cdot 3^1 \cdot 3^4 = 3^{3+1+4} = 3^8)$
d) 11^{13}
e) $(-8)^{17}$

3 a) 12^6
b) 11^{14}
c) 6^{11}
d) 2^9
e) 10^{28}

4 a) 7^5
b) 4^6
c) 3^5
d) 7^{20}
e) 5^1
f) $(-9)^3$

5 Observera att det inte finns några potenslagar för addition eller subtraktion av potenser.
a) 98 eftersom $7^2 + 7^2 = 49 + 49 = 98$)
b) 39 eftersom
$(2^3)^2 - 5^2 = 2^6 - 5^2 = 64 - 25 = 39$
c) 9 eftersom $(2-5)^2 = (-3)^2 = 9$
d) 11 000 eftersom
$10^3 + 10^2 \cdot 10^2 = 1\,000 + 10\,000 = 11\,000$
e) 90 eftersom
$\frac{9^4}{9^3} + 9^2 = 9^{4-3} + 9^2 = 9^1 + 81 = 90$

6 a) $2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128$ och $2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24$
b) $(3^2)^2 = 3^4 = 81$ och $2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$
c) $2^2 + 5^2 = 29$ och $2^2 \cdot 5^2 = 4 \cdot 25 = 100$
d) $(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$ och
$-4^2 = -(4^2) = -16$
e) $\frac{10^2}{10^1} = 10^{2-1} = 10$ och
$10^2 - 10^1 = 100 - 10 = 90$

MATEMATIK ORIGO © SANOMA UTBILDNING OCH FÖRFATTARNA

Övningsblad
Det binära och det hexadecimala talsystemet

1 Skriv i utvecklad form

Exempel:
$1\,354_{\text{tio}} = 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 4 \cdot 10^0$

a) $14\,950_{\text{tio}}$
b) $1011_{\text{två}}$
c) $110110_{\text{två}}$
d) 123_{sexton}

2 Skriv talen i det decimala talsystemet

Exempel: $1011_{\text{två}} = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$
$= 8 + 0 + 2 + 1 = 11_{\text{tio}}$

a) $10_{\text{två}}$
b) $1101_{\text{två}}$
c) $11111_{\text{två}}$
d) $10001_{\text{två}}$
e) $A3_{\text{sexton}}$
f) BEC_{sexton}

3 Skriv talen i det binära talsystemet

Exempel:
$12_{\text{tio}} = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 1100_{\text{två}}$

a) 7_{tio}
b) 8_{tio}
c) 53_{tio}
d) 127_{tio}

Det hexadecimala talsystemet

I det hexadecimala talsystemet motsvarar

$A = 10_{\text{tio}}$	$B = 11_{\text{tio}}$	$C = 12_{\text{tio}}$
$D = 13_{\text{tio}}$	$E = 14_{\text{tio}}$	$F = 15_{\text{tio}}$

4 Skriv talen i det hexadecimala talsystemet

Exempel: $20_{\text{tio}} = 1 \cdot 16^1 + 4 \cdot 16^0 = 14_{\text{sexton}}$

a) 16_{tio}
b) 23_{tio}
c) 404_{tio}
d) $1010_{\text{två}}$

5 Ange i det binära talsystemet resultatet av följande räkneoperationer, t.ex. genom att först gå över till det decimala talsystemet.

a) $10_{\text{två}} + 10_{\text{två}}$
b) $101_{\text{två}} - 100_{\text{två}}$
c) $111_{\text{två}} - 101_{\text{två}} + 1_{\text{två}}$
d) $16_{\text{sexton}} - 6_{\text{sexton}}$

6 Vad är gemensamt för de tal som slutar på en nolla i det binära talsystemet?

7 Vilket är det största tal som man kan skriva med 8 siffror i det binära talsystemet? Svara i det decimala talsystemet.

MATEMATIK ORIGO © SANOMA UTBILDNING OCH FÖRFATTARNA

Procentenheter

Procentenheter används för att uttrycka *differensen* mellan två tal i procentform.

1 Ett företag som tillverkar saft minskade andelen socker från 20 % till 15 %. Hur stor var minskningen

a) i procentenheter

b) i procent

2 I en omröstning på en gymnasieskola visade det sig att 65 % av eleverna var positiva till att bilda en studentförening. Ett år senare gjorde man om undersökningen. Då var 75 % av eleverna positiva till att bilda en studentförening. Hur stor var ökningen

a) i procent

b) i procentenheter

3 Rolf och Lena har tagit ett lån för att kunna köpa en lägenhet. När räntesatsen på lånet ökade från 2,5 % till 3,5 % var Lena och Rolf inte överens om hur stor ökningen egentligen var.

– Räntesatsen har ökat med 40 %, säger Rolf.

– Räntesatsen har ökat med 1 %, säger Lena.

Vem har rätt? Motivera.

4 Andelen män i en företagsstyrelse minskade med 12,5 procentheter. Efter minskningen var andelen män i styrelsen 62,5 %.

a) Hur stor var andelen män innan minskningen?

b) Hur stor var minskningen i procent?

5 I klass SP1b gick 12 flickor och 13 pojkar.

a) Hur stor var andelen flickor?

b) Inför årskurs 2 tillkom 2 flickor och 3 pojkar till klassen. Hur stor var nu andelen flickor i klassen?

c) Hur har andelen flickor förändrats mellan årskurs 1 och årskurs 2? Svara i procentenheter.

6 Enligt ett förslag skulle bokmomsen sänkas från 6 % till 5 %.

a) Hur stor är sänkningen i procentenheter?

b) En bok kostar 130 kronor utan moms. Vad kostar boken om man lägger till 6 % moms?

c) Vad kostar boken om bokmomsen i stället är 5 %?

d) Hur mycket billigare blir boken om bokmomsen sänks till 5 %? Svara i procent.

7 Avgör om följande påståenden är sanna eller falska. Motivera dina svar.

a) En sänkning från 35 kronor till 30 kr är en sänkning med 5 procentenheter.

b) Om en räntesats höjs med 1 procentenhet är det möjligt att räntesatsen ökade med 100 %.

c) En förändringsfaktor på 1,35 motsvarar en ökning med 35 procentenheter.

MATEMATIK ORIGO © SANOMA UTBILDNING OCH FÖRFATTARNA

Övningsblad
Funktionsbegreppet 1

1 Lös uppgifterna med hjälp av tabellen.

x	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	3,5	4	0	−1	2	5

Bestäm

a) $f(2)$

b) $f(4)$

c) $f(-1)$

För vilket värde på x är

d) $f(x) = 4$

e) $f(x) = 0$

2 Bestäm med hjälp av tabellen

x	−2,5	−1	0	1	2,5	4
$g(x)$	6,25	1	0	1	6,25	16

a) $g(-1)$

b) $g(0)$

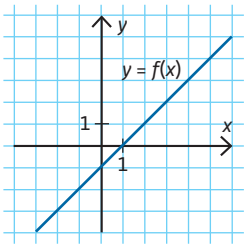
c) $g(4)$

Lös ekvationerna

d) $g(x) = 16$

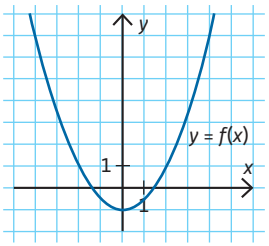
e) $g(x) = 6{,}25$

3 I koordinatsystemet här nedanför visas grafen till $y = f(x)$. Fyll i värdetabellen med hjälp av grafen.



x	$f(x)$
−3	
−1	
0	
2	
3	
5	

4 Lös uppgifterna med hjälp av grafen.



Bestäm

a) $f(-2)$

b) $f(0)$

c) $f(3)$

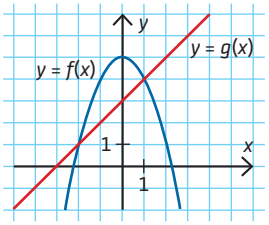
Lös ekvationerna

d) $f(x) = 7$

e) $f(x) = -1$

f) $f(x) = 0$

5 Graferna till funktionerna f och g visas i figuren här nedanför. Lös uppgifterna med hjälp av graferna.



Bestäm

a) $f(0)$

b) $f(2)$

c) $g(0)$

Lös ekvationerna

d) $g(x) = 0$

e) $f(x) = 4$

f) $f(x) = g(x)$

MATEMATIK ORIGO © SANOMA UTBILDNING OCH FÖRFATTARNA

A Aktivitet
Grodfamiljerna

I den här uppgiften ska du undersöka hur många förflyttningar som krävs för att två grodfamiljer ska kunna byta plats på en smal spång. För att genomföra uppgiften behöver du rita upp en spelplan som den på bilden här nedanför. Du behöver också markörer av något slag, t.ex. knappar, pappersbitar eller gem, i två olika färger. Du behöver tre markörer av varje färg.

Genomförande

- Två grodfamiljer möter varandra på en smal spång. Ställ upp grodfamiljerna på spelplanen enligt bilden här nedanför med en plats mellan sig.

- Du ska nu byta plats på grodfamiljerna med så få hopp som möjligt. Det ska vara en tom plats mellan familjerna när de har bytt plats. Grodorna får hoppa enligt följande regler:
  - Bara en groda får hoppa åt gången.
  - En groda får hoppa till en tom plats precis framför sig eller över en mötande groda till en tom plats.
  - Ingen groda får hoppa tillbaka.
- Hur många hopp behövs för att byta plats på grodfamiljerna?
- Gör samma sak med grodfamiljer som har två medlemmar var och sedan med grodfamiljer som bara har en medlem var. Hur många hopp behövs då?
- Fyll i ditt resultat i en tabell där den första kolumnen anger antalet grodor från varje familj och den andra kolumnen anger det minsta antalet hopp som behövs för att familjerna ska byta plats.
- Hur många hopp behövs om det är fyra grodor i varje familj? Gissa utifrån ditt tidigare resultat och pröva sedan om din gissning stämmer.
- Hur många hopp behövs om det är 10 grodor i varje familj?
- Vilket är det minsta antalet hopp som krävs om det finns n grodor i familjen? Skriv en regel eller en formel som beskriver det du har kommit fram till.

MATEMATIK ORIGO © SANOMA UTBILDNING OCH FÖRFATTARNA

Bakgrund

Denna aktivitet har en lång historia och finns i olika varianter runt om i världen. Det förekommer såväl stengetter som kängurur som ska ta sig förbi varandra på liknande sätt. I Norge kallas aktiviteten Froskehopp och i NCM:s material Strävorna finns en liknande utmaning med namnet Grodhopp.

Syfte och centralt innehåll

Aktiviteten behandlar det centrala innehållet: *Generalisering av aritmetikens räknelagar till att hantera algebraiska uttryck*. Uppgiften tränar elevernas problemlösningsförmåga samt deras resonemangs- och kommunikationsförmåga.

Materiel

Eleverna behöver markörer av något slag i två olika färger. Markörerna kan vara knappar, pappersbitar, gem eller liknande. Varje elev behöver tre markörer av varje färg.

Förslag på utförande

Ge en kort introduktion av problemet i helklass och låt sedan eleverna arbeta enskilt med problemet. När eleverna fått tid att sätta sig in i problemet och behandlat några av deluppgifterna kan de jämföra sina slutsatser i par eller i grupp. Aktiviteten kan avslutas med en uppföljning i helklass där eleverna får presentera vad de har kommit fram till.

Förflyttningar

Om grodorna till vänster är vita och grodorna till höger är blå, så kan man gå till väga på följande sätt: Den vita grodan närmast mitten flyttas till den tomma platsen och den blå grodan närmast mitten hoppar över den vita grodan. Nästa blå groda flyttas till den tomma platsen. (Detta är det kritiska steget. Det är vanligt att eleverna gör misstaget att flytta den första vita grodan som tredje drag.) Den första vita grodan fortsätter sedan att hoppa över en blå groda. Den andra vita hoppar över en blå och till sist flyttas den tredje vita grodan till den plats som är tom. Man fortsätter sedan med de blå grodorna. Härifrån brukar det inte vara några större problem att få grodorna att byta plats. (Man kan förstås även börja med en blå groda och därefter göra på motsvarande sätt).

Uppföljning

Följ upp elevernas resultat i helklass. Fyll i en gemensam tabell på tavlan och diskutera vilka mönster eleverna har hittat. Eleverna kanske tycker att det är konstigt att det kan bli så många olika formler. Men om man gemensamt förenklar de olika uttrycken så ser man att $n(n+2) = (n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n$. Här finns möjlighet att diskutera skillnaden mellan en sluten formel och en rekursiv formel. Man kan även komma in på begreppet aritmetisk talföljd och visa hur den aritmetiska summan av det sista uttrycket kan beräknas. Vid förenkling ser man då att man även här får uttrycket $n^2 + 2n$.

Antal grodor per familj	Antal hopp	Mönster/Formel			
1	3	$1 \cdot 3$	$1^2 + 2 \cdot 1$	$2^2 - 1$	3
2	8	$2 \cdot 4$	$2^2 + 2 \cdot 2$	$3^2 - 1$	$3 + 5$
3	15	$2 \cdot 5$	$3^2 + 2 \cdot 3$	$4^2 - 1$	$3 + 5 + 7$
4	24	$4 \cdot 6$	$4^2 + 2 \cdot 4$	$5^2 - 1$	$3 + 5 + 7 + 9$
...	...	...	...	...	...
10	120	$10 \cdot 12$	$10^2 + 2 \cdot 10$	$11^2 - 1$	$3 + 5 + 7 + \ldots + (2 \cdot 10 + 1)$
n	n	$n(n+2)$	$n^2 + 2 \cdot n$	$(n+1)^2 - 1$	$3 + 5 + 7 + \ldots + (2n + 1)$
		$a_n = n(n+2)$	$a_n = n^2 + 2n$	$a_n = (n+1)^2 - 1$	$a_n = a_{n-1} + (2n + 1)$

MATEMATIK ORIGO © SANOMA UTBILDNING OCH FÖRFATTARNA